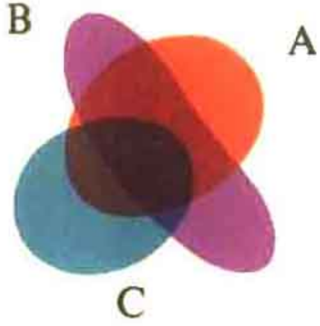
Lecciones populares de matemáticas

# ÁLGEBRA EXTRAORDINARIA

I. M. Yaglom




Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

И. М. ЯГЛОМ

# НЕОБЫКНОВЕННАЯ АЛГЕБРА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

I. M. YAGLOM

# ALGEBRA EXTRAORDINARIA

Segunda edición

Traducido del ruso por Carlos Vega,
Candidato a Doctor en Ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

EDITORIAL MIR
MOSCU

Primera edición 1977
Segunda edición 1983

*На испанском языке*



IMPRESO EN LA URSS

# INDICE

## § 1.

# ALGEBRA DE LOS NUMEROS Y ALGEBRA DE LOS CONJUNTOS

En la escuela, durante las clases de Aritmética y de Algebra, se estudian números de la más diversa índole. En el primer grado los alumnos se encuentran con los números enteros que no les crean dificultades, pues en su mayoría vienen a la escuela teniendo cierto conocimiento de los mismos. Pero más tarde aparecen nuevos y nuevos «números»; ahora ya nos hemos acostumbrado a ellos y no nos sorprenden; pero no menos cierto es que cada vez que se amplía el concepto de número tenemos que deshacernos de unas u otras ilusiones. El número (entero) responde a la pregunta de cuántos objetos contiene una u otra colección; por ejemplo, de cuántas manzanas hay en una cesta, de cuántas páginas tiene un libro o de cuántos varones hay en un aula. ¿Y las fracciones? ¿Acaso puede haber en un aula $33\frac{1}{3}$ varones o aparecer $3\frac{1}{4}$ platos en una mesa? Claro que no. Pero en la mesa puede haber $4\frac{1}{2}$ manzanas, una película puede durar $1\frac{3}{4}$ horas e incluso puede haber en un estante $6\frac{1}{2}$ libros (lo que no habla a favor del dueño de los libros pero tampoco contradice el sentido común). Apenas nos acostumbramos a que puede haber un número fraccionario de objetos, aparecen los números negativos. Claro está que en un estante no puede haber —3 libros; esto sería ya contranatural. Pero un termómetro puede marcar —5° y tú puedes tener —50 kopeks; lo último, desde luego, es muy lamentable, pero sólo para ti y no para las Matemáticas. Y en los grados superiores aparecen números verdaderamente «terribles»: primero los irracionales, como es $\sqrt{2}$,

y después los imaginarios, como es $1 + 2i$[1]); los propios nombres explican la actitud del hombre hacia estos números hasta que se acostumbró a ellos. Es posible que tú los ignores por ahora y sólo los conozcas más adelante[2]); esto no es óbice

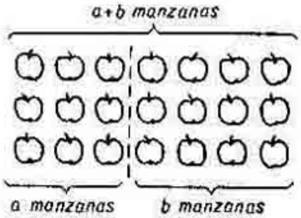



FIG. 1

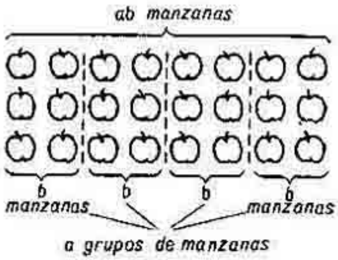



FIG. 2

para que leas este libro. Los números irracionales e imaginarios están muy lejos de la idea primaria del número en tanto que característica de la cantidad de objetos; sin embargo, también llevan el nombre de «números».

¿Qué es lo que tienen de común todos estos tipos de números? ¿qué obliga a darles el mismo nombre de «número»? La semejanza principal entre todos los tipos de números consiste en que se pueden sumar y multiplicar[3]). Pero esta semejanza es bastante relativa: aun cuando podamos sumar y multiplicar números de todos los tipos, estas operaciones tienen sentido absolutamente distinto en los diferentes casos.

---

[1]) Los números de tipo $1 + 2i$ suelen denominarse actualmente *complejos*; el término *imaginario* (o *imaginario puro*) se emplea para los números como $2i$ o $-\sqrt{2}i$ (en contraposición, los números como $1$, $-\frac{3}{2}$ o $\sqrt{2}$ suelen denominarse *reales*).

[2]) Una exposición lúcida y sencilla de los distintos tipos de números aparece en el libro de I. Niven, *Numbres: rational and irrational*, Random House, New York, 1961.

[3]) Pero no restar ni tampoco dividir: si conocemos sólo los números positivos, no podemos restar del número 3 el número 5; si conocemos sólo los números enteros, no podemos dividir el número 7 por el número 4.

Así, sumar dos números enteros positivos $a$ y $b$ significa hallar el número de objetos comprendidos en la unión de dos colecciones, una de $a$ y otra de $b$ objetos: si en una clase de séptimo grado hay 35 alumnos y en otra clase del mismo grado hay 39 alumnos, en ambas clases de este grado habrá $35 + 39 = 74$ alumnos (véase también la fig. 1). De modo análogo, multiplicar los números enteros positivos $a$ y $b$ significa hallar el número de objetos del conjunto de $a$ colecciones con $b$ objetos en cada una: si en una escuela hay 3 clases de séptimo grado y en cada una estudian 36 alumnos, en la escuela habrá $3 \cdot 36 = 108$ alumnos de séptimo grado (véase también la fig. 2). Pero se hace imposible extender en esta forma las definiciones de la adición y de la multiplicación al caso de las fracciones ni al de los números negativos (de los números irracionales e imaginarios preferimos incluso no hablar aquí).

De tal manera, llegamos, al parecer, a la conclusión siguiente: denominamos con la misma palabra «número» distintos tipos de números debido a que todos se pueden sumar y multiplicar; pero las propias operaciones de adición y de multiplicación son absolutamente distintas según los diferentes tipos de números. Sin embargo, aquí nos hemos apresurado un poco: de hecho, la adición de los números enteros y la adición de las fracciones no son operaciones tan absolutamente distintas. Más exactamente, las *definiciones* de estas operaciones son efectivamente diferentes; ahora bien, sus *propiedades* son absolutamente idénticas. Así, para números de *cualquier* índole

| | | |
|---|---|---|
| $a+b=b+a$ <br> ley conmutativa de la adición | y | $ab=ba$; <br> ley conmutativa de la multiplicación |
| $(a+b)+c=a+(b+c)$ <br> ley asociativa de la adición | y | $(ab)c=a(bc)$; <br> ley asociativa de la miltiplicación |

en todos los casos existen dos números especiales 0 y 1, tales que

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a \cdot 1 = a$$

para todo número $a$. Y para el Álgebra moderna es típico el siguiente punto de vista acerca del contenido de esta materia: el Álgebra estudia algunos sistemas (distintos) de números

para los cuales están definidas las operaciones de adición y de multiplicación que verifican las leyes ya señaladas y otras como, por ejemplo,

$$(a + b)c = ac + bc,$$

ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma

donde $a$, $b$ y $c$ son números de *cualquier* índole.

La existencia en los sistemas de números de dos operaciones —la adición y la multiplicación— origina cierto paralelismo tanto más manifiesto por cuanto las propiedades de la adición se parecen mucho a las de la multiplicación. Este paralelismo se observa, por ejemplo, en que cualquier interrogado sustituirá en la «proporción» extraña

$$\frac{\text{adición}}{\text{resta}} = \frac{\text{multiplicación}}{?}$$

el signo de interrogación por «división» sin reparar mucho en lo que significa esta «proporción»; también se observa en que los alumnos, e incluso sus padres, confunden frecuentemente los términos de «número opuesto» (el número $-a$ que sumado con el número $a$ da 0) y de «número inverso» (el número $1/a$ cuyo producto por el número dado $a$ es igual a 1), así como en la similitud que existe entre las propiedades de la progresión aritmética (serie de números en la cual la diferencia entre dos números sucesivos cualesquiera es la misma) y la progresión geométrica (serie de números en la cual el cociente de dos números sucesivos cualesquiera es el mismo).

Sin embargo, no siempre se observa esta semejanza, este paralelismo. Por ejemplo, el número 0 desempeña un papel especial no sólo respecto a la adición sino también respecto a la multiplicación: esto se expresa en que para todo número $a$

$$a \cdot 0 = 0$$

(de aquí resulta, en particular, que no se puede dividir por 0 un número distinto de 0). Ahora bien, si en la última igualdad sustituimos la multiplicación por la adición y el cero por el uno, obtendremos una «igualdad» extraña

$$a + 1 = 1$$

válida sólo para $a = 0$[1]). Además, si en la ley distributiva $(a + b)\,c = ac + bc$ sustituimos la adición por la multiplicación y viceversa, obtendremos la «igualdad»

$$ab + c = (a + c)\,(b + c)$$

con la que nadie, por supuesto, estará de acuerdo. [Como es obvio que

$$(a + c)\,(b + c) = ab + ac + bc + c^2 = ab + c\,(a + b + c),$$

resulta que $(a + c)\,(b + c) = ab + c$ sólo si $c = 0$ o si $a + b + c = 1$.]

Pero el Álgebra conoce también otros sistemas, **no numéricos**, en los que también se pueden definir las operaciones de adición y de multiplicación más similares entre sí que la adición y la multiplicación de los números. Consideremos, por ejemplo, el *«álgebra de los conjuntos»* que es muy importante. Se entiende por *conjunto* una colección cualquiera de objetos arbitrarios denominados *elementos del conjunto*: se puede hablar del «conjunto de los alumnos de una clase de séptimo grado», del «conjunto de los puntos de un círculo», del «conjunto de los puntos de un cuadrado», del «conjunto de los elementos de la tabla periódica de Mendeléev», del «conjunto de los números pares», del «conjunto de las notas de los alumnos de una clase», del «conjunto de los elefantes de la India», del «conjunto de las faltas gramaticales en tu composición», etc. Resulta bastante claro cómo puede definirse la «suma de dos conjuntos»: *entenderemos por* **suma** *$A + B$ del conjunto $A$ y del conjunto $B$ simplemente la* **unión** *de ambos conjuntos*. Por ejemplo, si $A$ es el conjunto de varones y $B$ el conjunto de hembras de tu clase, $A + B$ es el conjunto de todos los alumnos de tu clase; si $A$ es el conjunto de todos los números enteros positivos pares y $B$ es el conjunto de todos los números divisibles por 3, el conjunto $A + B$

$$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, \ldots\}$$

consta de unos y otros números; si $A$ es el conjunto de los puntos del óvalo sombreado en la fig. 3 horizontalmente y

[1]) Si la igualdad $a + 1 = 1$ fuese válida para todo $a$, sería imposible restar 1 a cualquier número distinto de 1; esto, por supuesto, es falso; así $3 - 1 = 2$.

$B$ es el conjunto de los puntos del óvalo sombreado oblicuamente, el conjunto $A + B$ es toda la región sombreada en la fig. 3. Está claro (véase, por ejemplo, la fig. 3) que para cualesquiera dos conjuntos $A$ y $B$

$$A + B = B + A,$$

o sea, *para la adición de conjuntos se cumple la ley conmutativa*. Además, por supuesto, cualesquiera que sean los conjuntos $A$, $B$ y $C$ siempre

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

o sea, *tiene lugar la ley asociativa de la adición de conjuntos*. El conjunto $(A + B) + C$ (o $A + (B + C)$) se puede indicar

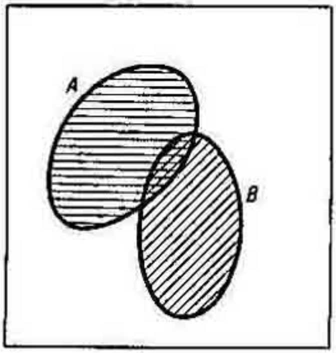



FIG. 3

simplemente por $A + B + C$ omitiendo los paréntesis; representa la unión de los tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ (así, en la fig. 4 el conjunto $A + B + C$ coincide con toda la región sombreada).

Convengamos ahora en *denominar* **producto** *$AB$ de los conjuntos $A$ y $B$ la parte común o la* **intersección** *de estos conjuntos*. Así, si $A$ es el conjunto de ajedrecistas de tu clase y $B$ es el conjunto de nadadores, $AB$ será el conjunto de los ajedrecistas diestros en natación; si $A$ es el conjunto de los números enteros positivos pares y $B$ es el conjunto de los

números divisibles por 3, el conjunto $AB$

$$\{6, 12, 18, 24, \ldots\}$$

está formado por todos los números divisibles por 6; si el conjunto $A$ consta de los puntos del óvalo sombreado en la fig. 5 horizontalmente y $B$ es el conjunto de los puntos del

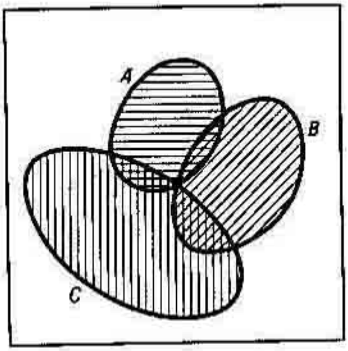



FIG. 4

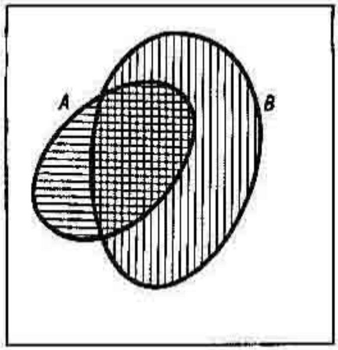



FIG. 5

óvalo sombreado verticalmente, el conjunto $AB$ quedará cubierto en la misma figura por una «reja» de líneas horizontales y verticales. Está claro que también *para la multiplicación de conjuntos se cumple la ley conmutativa*, o sea, para cualesquiera dos conjuntos $A$ y $B$

$$AB = BA$$

(véase la misma fig. 5; se comprende también que el «conjunto $AB$ de los ajedrecistas diestros en natación» y el «conjunto $BA$ de los nadadores diestros en el ajedrez» es un mismo conjunto). Además, es igualmente obvio que *para la multiplicación de conjuntos es válida también la ley asociativa*, o sea, para cualesquiera tres conjuntos $A$, $B$ y $C$

$$(AB)\,C = A\,(BC).$$

El conjunto $(AB)\,C$ o $A\,(BC)$ se puede indicar simplemente por $ABC$ omitiendo los paréntesis; representa la parte común

o la intersección de los tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ (en la fig. 6 el conjunto $ABC$ tiene un triple sombreado[1])).

Es notable que *para cualesquiera tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ se cumple también la ley distributiva:*

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

En efecto, si $A$ es, digamos, el conjunto de los ajedrecistas de tu clase, $B$ es el conjunto de los alumnos aficionados al

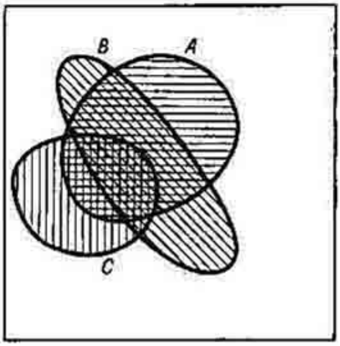



FIG. 6

juego de las damas y $C$ es el conjunto de los nadadores, entonces $A + B$ representa la unión de los conjuntos de los ajedrecistas y de los aficionados al juego de las damas, o sea, el conjunto de los alumnos aficionados a uno de estos juegos: al del ajedrez o al de las damas (o, posiblemente, y al del ajedrez y al de las damas). El conjunto $(A + B)\,C$ se obtiene del conjunto $A + B$ dejando en la unión $A + B$ sólo aque-

[1]) He aquí otro ejemplo que explica la ley asociativa de la multiplicación de conjuntos. Sean $A$ el conjunto de los números enteros divisibles por 2, $B$ el conjunto de los números divisibles por 3 y $C$ el conjunto de los números divisibles por 5; entonces, $AB$ es el conjunto de los números divisibles por 6 y $(AB)\,C$ es el conjunto de los números divisibles por 6 y por 5, o sea, divisbles por 30. De otro lado, $BC$ es el conjunto de los números divisibles por 15 y $A\,(BC)$ es el conjunto de los números pares divisibles por 15, o sea, es de nuevo el conjunto de todos los números (enteros) divisibles por 30.

llos alumnos que además saben nadar. Pero está claro que obtendremos exactamente el mismo conjunto formando la unión $AC + BC$ del conjunto $AC$ de los ajedrecistas diestros en natación y del conjunto $BC$ de los aficionados al juego de las damas que saben nadar.

Es posible que esta explicación verbal de la ley distributiva te parezca farragosa. Conviene emplear en tal caso la

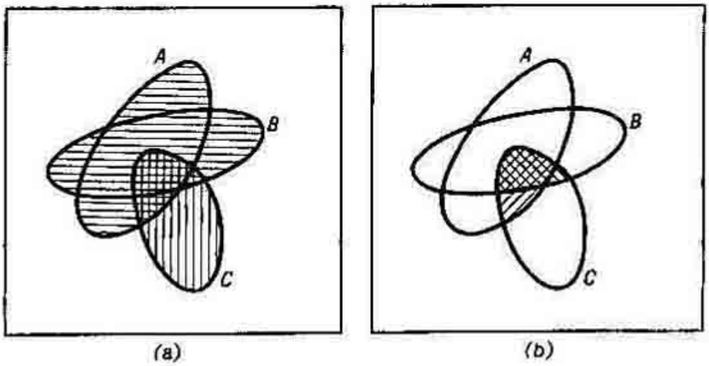



FIG. 7

representación gráfica. En la fig. 7, *a* el conjunto $A + B$ está sombreado horizontalmente y el conjunto $C$, verticalmente, de modo que el conjunto $(A + B) C$ resulta cubierto por una «reja» de líneas. En la fig. 7, *b* los conjuntos $AC$ y $BC$ están sombreados con líneas oblicuadas hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente; el conjunto $AC + BC$ coincide con toda la región sombreada en esta figura. Pero es fácil ver que la región $AC + BC$ sombreada en la fig. 7, *b* no difiere de la región $(A + B) C$ doblemente sombreada en la fig. 7, *a*.

No es difícil comprender qué «conjunto» desempeña el papel del cero en nuestra «álgebra de los conjuntos». En efecto, la adición de este conjunto $O$ (designaremos el «conjunto cero» por la letra $O$, similar por su forma al número 0) no debe alterar ningún conjunto; luego, el conjunto $O$ no contiene ningún elemento, es «vacío». Puedes sentir el deseo de excluir por completo semejante *conjunto vacío* de la con-

sideración: si el conjunto $O$ no contiene elementos, representa un absurdo, y no un conjunto, y ni siquiera vale la pena hablar de él. Sin embargo, tan infundado sería proceder de esta manera como excluir el 0 del conjunto de los números por el mero hecho de que la «colección» de cero objetos también es «vacía» y, al parecer, no tiene sentido hablar del «número» de objetos que contiene. Pero, en realidad, sí tiene sentido; y mucho. Si no tuviésemos el número 0, no podríamos restar uno de otro cada dos números (porque en este caso la diferencia 3—3 no sería igual a nada), no podríamos representar, digamos, el número 108 (una centena, ocho unidades y ninguna decena) en el sistema decimal de numeración, como tampoco podríamos hacer otras muchas cosas; no es casual que el surgimiento de la idea del cero sea considerado como uno de los acontecimientos más notables en toda la historia de la Aritmética. Exactamente igual, si no se incluye entre los conjuntos el conjunto vacío $O$, no podremos señalar el producto (o la intersección) de dos conjuntos cualesquiera: así, es vacía la intersección de los conjuntos $A$ y $B$ representados en la fig. 8, como también es vacía la intersección del conjunto de los alumnos de tu clase que estudian en sobresaliente y del conjunto de los elefantes. Y en general, si nos negásemos a usar el concepto de «conjunto vacío», en muchos casos tendríamos que hablar de los conjuntos con gran recelo: ¿y si resulta vacío, o sea, no existe, el «conjunto de los alumnos de quinto grado llamados Andrés en la escuela N° 6 de Leningrado»?

Está claro que si $O$ es el conjunto vacío, entonces para cualquier conjunto $A$

$$A + O = A.$$

No menos claro está que cualquiera que sea el conjunto $A$ siempre

$$AO = O,$$

ya que es necesariamente vacía la intersección de cualquier conjunto $A$ y del conjunto $O$ carente de elementos (digamos, la intersección del conjunto de las alumnas de tu clase y del conjunto de todos los alumnos de estatura superior a 2,5 m).

En cuanto al «conjunto unidad», la situación es algo más complicada. Este conjunto $I$ (lo designaremos por la letra $I$, similar por su forma al número 1) debe ser tal que su producto (o sea, intersección) con *cualquier* conjunto $A$ tiene que coin-

cidir con $A$. Pero de aquí se deduce que nuestro conjunto $I$ debe contener *todos* los elementos de todos los conjuntos $A$. Está claro que semejante conjunto puede existir sólo si nos limitamos a aquellos conjuntos $A$ cuyos elementos se toman de una determinada colección de «objetos»: a los conjuntos de los alumnos de una escuela o clase determinadas (por ejemplo, $A$ puede ser el conjunto de los alumnos que estudian en

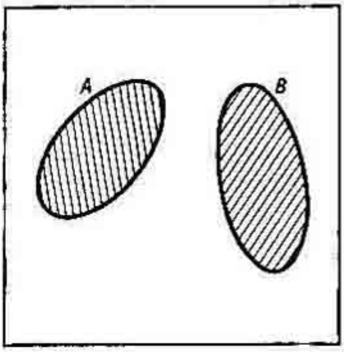



FIG. 8

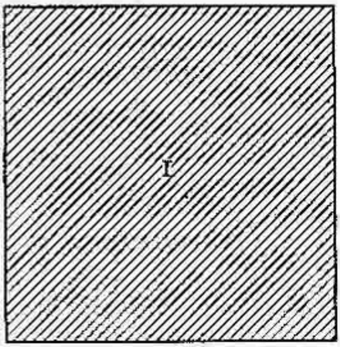



FIG. 9

sobresaliente y $B$ el conjunto de los ajedrecistas); a los conjuntos formados por números enteros positivos ($A$ puede ser el conjunto de los números pares y $B$ el conjunto de los números primos que no admiten más divisores que ellos mismos y la unidad); a los conjuntos compuestos por puntos que forman figuras pertenecientes a un determinado cuadrado como las representadas en las fig. 3, 4, 5, 6, 7 y 8. En este caso entenderemos por $I$ el «conjunto más grande» que contiene todos los «objetos» considerados: el conjunto de todos los alumnos de la escuela o la clase consideradas, el conjunto de todos los números enteros positivos o bien el conjunto de todos los puntos del cuadrado (fig. 9). En el «álgebra de los conjuntos» este conjunto $I$ lleva el nombre de *unitario* o *universo*. Es obvio que para cualquier conjunto «menor» $A$ (e incluso para el conjunto $A$ que coincide con $I$) tendremos

$$AI = A$$

en plena correspondencia con la condición que define la unidad.

De este modo vemos que en el «álgebra de los conjuntos» construida las leyes de las operaciones se asemejan mucho a las leyes del álgebra, referentes a los números, que conocemos del curso escolar de Matemáticas; sin embargo, esta semejanza con las leyes numéricas no es total. Es verdad que en el álgebra de los conjuntos tienen lugar, como hemos comprobado, casi todas las leyes principales válidas para los números; pero en ella también se cumplen otras leyes que, posiblemente, te parecerán extrañas. Por ejemplo, hemos señalado ya que para los números no tiene lugar, como regla, la ley que resulta de la igualdad $a \cdot 0 = 0$ si sustituimos en ella la multiplicación por la adición y el cero por la unidad ya que para casi todos los números $a$ tenemos $a + 1 \neq 1$. En cambio, en el álgebra de los conjuntos la situación es distinta: aquí **siempre**

$$A + I = I.$$

En efecto, el conjunto $I$ es, por definición, el «más grande» y, por eso, es imposible aumentarlo más: cualquiera que sea al conjunto $A$ (tomado entre los conjuntos considerados) que agreguemos al conjunto unitario $I$, siempre obtendremos el mismo conjunto $I$.

Además, al sustituir en la ley distributiva $(a + b)\, c = ac + bc$ la adición por la multiplicación y viceversa, hemos obtenido la «igualdad» absurda $ab + c = (a + c) \times (b + c)$ que para los números resulta casi siempre falsa. En el álgebra de los conjuntos la situación es otra: aquí *siempre* (o sea, para cualesquiera conjuntos $A$, $B$ y $C$) tiene lugar la igualdad

$$AB + C = (A + C)\,(B + C)$$

que expresa la *segunda ley distributiva* (la ley distributiva de la adición respecto a la multiplicación) del álgebra de los conjuntos. En efecto, sean de nuevo $A$ el conjunto de los ajedrecistas, $B$ el conjunto de los aficionados al juego de las damas y $C$ el conjunto de los nadadores de tu clase. En tal caso es evidente que la intersección $AB$ de los conjuntos $A$ y $B$ comprende a todos los alumnos diestros tanto en el ajedrez como en el juego de las damas y que la unión $AB + C$ de los conjuntos $AB$ y $C$ consta de todos los alumnos que son

aficionados y al ajedrez y al juego de las damas o que saben nadar (es posible que son aficionados al ajedrez, al juego de las damas y a la natación). De otro lado, las uniones $A + C$ y $B + C$ de los conjuntos $A$ y $C$ y de los conjuntos $B$ y $C$ se componen, respectivamente, de los alumnos aficionados al ajedrez o diestros en natación (o, posiblemente, aficionados y al ajedrez y a la natación) y de los alumnos aficionados al juego de las damas o a la natación. Está claro que la intersección $(A + C)(B + C)$ de estos dos últimos conjuntos

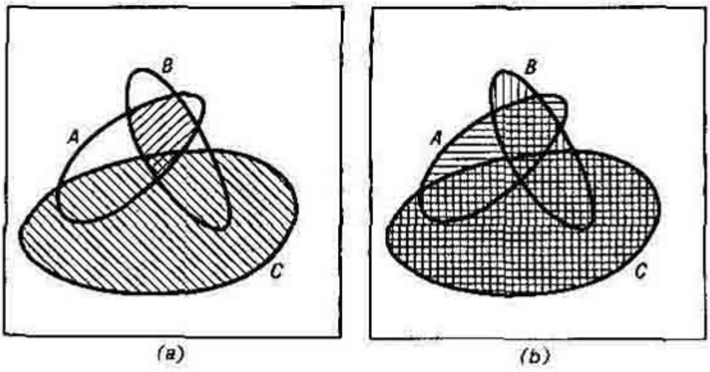



FIG. 10

comprende a todos los alumnos diestros en natación y a todos los alumnos que no saben nadar pero son aficionados tanto al ajedrez como al juego de las damas, o sea, esta intersección coincide con el conjunto $AB + C$.

Puesto que esta explicación verbal te puede parecer enrevesada, daremos además una interpretación gráfica de la segunda ley distributiva. En la fig. 10, *a* la intersección $AB$ de los conjuntos $A$ y $B$ está sombreada con líneas oblicuadas hacia la derecha y el conjunto $C$, con líneas oblicuadas hacia la izquierda; toda la región sombreada en esta figura representa el conjunto $AB + C$. En la fig. 10, *b* hemos sombreado horizontalmente la unión $A + C$ de los conjuntos $A$ y $C$ y verticalmente la unión $B + C$ de los conjuntos $B$ y $C$; la intersección $(A + C)(B + C)$ de estas dos uniones queda cubierta en esta figura por una «red». Pero es fácil ver que

la región de la fig. 10, *b* cubierta por la red de líneas horizontales y verticales coincide exactamente con la región sombreada en la fig. 10, *a*; esto demuestra precisamente la segunda ley distributiva.

Señalemos, para terminar, otras dos leyes del álgebra de los conjuntos que contradicen los conocimientos algebraicos adquiridos en la escuela. Es fácil comprender que cualquiera que sea el conjunto $A$, su unión con otro *igual* y su intersección con *sí mismo* coinciden con el conjunto inicial $A$:

$$A + A = A \quad \text{y} \quad AA = A.$$

Estas dos igualdades se denominan a veces *leyes idempotentes.*

Es muy ventajoso el hecho de que las leyes generales del Algebra conservan una misma forma para todos los tipos de números: gracias a ello, al pasar de los números enteros a los fraccionarios o relativos (tomados con el signo «más» o «menos»), podemos utilizar plenamente los hábitos adquiridos con anterioridad y sólo necesitamos añadir otros (de acuerdo a la reserva más rica de números considerados), pero no adquirir nuevos. La situación es enteramente distinta cuando pasamos de los números a los conjuntos: aquí parcialmente necesitamos también hábitos nuevos, ya que una serie de leyes del álgebra de los conjuntos no tiene lugar para los números[1]).

[1]) En esta diferencia entre las leyes del álgebra de los conjuntos y las leyes numéricas radica precisamente la causa de que en muchos textos la adición y la multiplicación (o sea, la unión y la intersección) de los conjuntos se indican con signos completamente distintos de los signos corrientes $+$ y $\cdot$; la unión de los conjuntos $A$ y $B$ se indica por $A \cup B$ y la intersección de estos conjuntos, por $A \cap B$. Puesto que en este folleto también hablaremos de otros sistemas algebraicos en los cuales la «adición» y la «multiplicación» se rigen por las mismas leyes que se dan en el álgebra de los conjuntos, resulta natural que nos desentendamos de los símbolos $\cup$ y $\cap$ propios precisamente de la teoría de los conjuntos; el deseo de subrayar la proximidad existente entre las álgebras consideradas y el álgebra escolar empuja a emplear los signos habituales de adición y multiplicación. Sin embargo, conviene, por lo visto, escribir aquí las principales leyes del álgebra de los conjuntos también en las designaciones estándar de la teoría de los conjuntos:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad A \cap B = B \cap A;$$
leyes conmutativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{y} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$
leyes asociativas

Enumeremos estas leyes *nuevas*. Entre ellas figura la relación

$$A + I = I$$

que determina la profunda diferencia existente entre el conjunto unitario $I$ y el número 1. La segunda ley distributiva del álgebra de los conjuntos ofrece una forma muy peculiar de «abrir los paréntesis»:

$$(A + C)(B + C) = AB + C;$$

por ejemplo, aquí

$$(A + D)(B + D)(C + D) = [(A + D)(B + D)](C + D) =$$
$$= (AB + D)(C + D) = (AB)C + D = ABC + D.$$

Por último, resultan totalmente nuevas para nosotros las leyes idempotentes

$$A + A = A \quad \text{y} \quad AA = A$$

que a veces se expresan en la forma siguiente: *en el álgebra de los conjuntos no existen exponentes ni coeficientes*. En efecto, tenemos para cualesquiera $A$ y $n$,

$$\underbrace{A + A + \ldots + A}_{n \text{ veces}} = A \quad \text{y} \quad \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ veces}} = A;$$

así, por ejemplo,

$$(A + B)(B + C)(C + A) =$$
$$= ABC + AAB + ACC + AAC + BBC + ABB +$$
$$+ BCC + ABC = (ABC + ABC) + (AB + AB) +$$
$$+ (AC + AC) + (BC + BC) = ABC + AB + AC + BC$$

(compara con el ejercicio 6 que viene a continuación).

---

$$A \cup O = A \quad \text{y} \quad A \cap I = A,$$
$$A \cup I = I \quad \text{y} \quad A \cap O = O;$$

propiedades del conjunto vacío $O$ y del conjunto unitario $I$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{y} \quad (A \cap B) \cup C =$$
$$= (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

leyes distributivas

$$A \cup A = A \quad \text{y} \quad A \cap A = A.$$

leyes idempotentes

EJERCICIOS

Demuestra las igualdades siguientes en las que las letras mayúsculas representan conjuntos (con la particularidad de que las letras $O$ e $I$ representan siempre los conjuntos vacío y unitario, respectivamente):

1. $(A + B)(A + C)(B + D)(C + D) = AD + BC$.
2. $A(A + B) = A$.
3. $AB + A = A$.
4. $A(A + C)(B + C) = AB + AC$.
5. $A(A + I)(B + O) = AB$.
6. $(A + B)(B + C)(C + A) = AB + BC + CA$.
7. $(A + B)(B + C)(C + D) = AC + BC + BD$.
8. $(A + B)(A + I) + (A + B)(B + O) = A + B$.
9. $(A + B)(B + I)(A + O) = A$.
10. $(A + B + C)(B + C + D)(C + D + A) = AB + AD + BD + C$.

**Ejemplo:**

$$A(A+C)(B+C) \underset{\text{ley asociativa de la multiplicación}}{=} A[(A+C)(B+C)] =$$

$$\underset{\text{2ª ley distributiva}}{=} A(AB+C) \underset{\text{ley conmutativa de la multiplicación}}{=} (AB+C)A =$$

$$\underset{\text{1ª ley distributiva}}{=} (AB)A+CA \underset{\text{leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación}}{=}$$

$$=(AA)B+AC \underset{\text{ley idempotente de la multiplicación}}{=} AB+AC.$$

## § 2.

## ALGEBRAS DE BOOLE

Reunamos todas las leyes del álgebra de los conjuntos que conocemos hasta el momento

$$A + B = B + A \quad \text{y} \quad AB = BA;$$
leyes conmutativas

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ y } (AB)C = A(BC);$$
leyes asociativas

$$(A + B)\,C = AC + BC \quad \text{y} \quad AB + C = (A + C)\,(B + C);$$

leyes distributivas

$$A + A = A \quad \text{y} \quad AA = A.$$

leyes idempotentes

Además, en el álgebra de los conjuntos existen dos elementos (conjuntos) especiales $O$ e $I$ tales que

$$A + O = A \quad \text{y} \quad AI = A;$$
$$A + I = I \quad \text{y} \quad AO = O.$$

Estas leyes (o reglas de las operaciones) son similares a las leyes del álgebra de los números que tú dominas pero no coinciden con ellas; por supuesto, el álgebra de los conjuntos también es un «álgebra», pero no aquella que tú has estudiado antes, sino un álgebra nueva, extraordinaria.

Pero tampoco el *álgebra* corriente *de los números* es un álgebra única, sino muchas «álgebras»: podemos hablar del «álgebra de los números enteros positivos», del «álgebra de los números racionales (o sea, enteros y fraccionarios)», del «álgebra de los números relativos (o sea, positivos y no positivos)»; existe además el «álgebra de los números reales (o sea, racionales e irracionales)», el «álgebra de los números complejos (reales e imaginarios)», etc. Todas estas «álgebras» difieren una de otra tanto en los números con los que se opera, como en la definición de estas operaciones (o sea, de la adición y la multiplicación); sin embargo, las propiedades principales de las operaciones son las mismas en todos los casos. Es natural preguntarse entonces cuál es la situación en el álgebra específica de los conjuntos: ¿aparece ésta en una forma única, o también aquí existe una serie de «álgebras» similares que difieren una de otra tanto en los elementos con los que se opera como en la definición de estas operaciones (que continuaremos denominando adición y multiplicación) pero que son idénticas en cuanto a las propiedades de estas operaciones?

Probablemente, tú presientes ya que existen muchas álgebras semejantes al álgebra de los conjuntos (o sea, álgebras en las que rigen las mismas reglas que en el álgebra de los conjuntos). Y esto efectivamente es así. En primer lugar, las propias *álgebras de los conjuntos* pueden ser muy variadas: podemos hablar del «álgebra de los conjuntos de alumnos de

tu clase», del «álgebra de los conjuntos de animales del parque zoológico de Moscú» (que, por supuesto, es un álgebra totalmente distinta), del «álgebra de los conjuntos formados por unos u otros números», del «álgebra de los conjuntos formados por puntos de un cuadrado» (véanse las figuras de la 3 a la 10), del «álgebra de los conjuntos de libros de una biblioteca escolar» o del «álgebra de los conjuntos de estrellas». Pero existen también otros ejemplos, muy distintos, de álgebras que tienen propiedades semejantes; ahora daremos algunos.

Un minuto de atención antes de pasar a estos ejemplos. Al analizar los ejemplos que vienen a continuación, debes recordar con seguridad que *definir en un conjunto de objetos (elementos) a, b, . . . las operaciones de* **adición**[1] *y* **multiplicación** *significa exponer las reglas que a cada par de objetos a y b ponen en correspondencia otros dos objetos c y d llamados* **suma** *y* **producto** *de a y b:*

$$c = a + b \quad \text{y} \quad d = ab.$$

Escogeremos estas reglas de modo que se cumplan todas las leyes de operaciones que caracterizan el álgebra de los conjuntos. Pero no tienes derecho a preguntar por qué la suma de $a$ y $b$ es igual a $c$; pues *definimos* la suma $a + b$ precisamente como $c$ y las definiciones, como se sabe, no son objeto de discusión. Puede suceder que en algunos casos nuestras definiciones te parezcan extrañas; y es natural, porque estas definiciones serán nuevas para ti y todo lo nuevo, lo insólito, siempre parece extraño. En la vida no te sorprenden objetos tan asombrosos como son el televisor y el teléfono; pero esto se debe sólo a que estás acostumbrado a ellos. En cambio, si tomamos un alumno de segundo o tercer grado —que está firmemente convencido de que la suma de dos números $a$ y $b$ es el número de objetos de la unión de una colección de $a$ objetos y de una colección de $b$ objetos (véase la fig. 1 de la pág. 8) y de que el producto $ab$ es el número de objetos de la unión de $a$ colecciones con $b$ objetos en cada una (véase la fig. 2 de la pág. 8)—, le explicamos qué es una fracción y después le decimos que la suma y el producto de las fracciones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{d}$ se definen así

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd},$$

estas reglas (que para ti resultan ahora absolutamente naturales) le parecerán, seguramente, muy extrañas.

Pues bien, he aquí nuestros ejemplos.

**Ejemplo 1.** *Algebra de los dos números.* Aceptemos que nuestra álgebra tiene dos elementos solamente que, por razones de comodidad, denominaremos números e indicaremos con los símbolos habituales 0 y 1 (aunque aquí estos símbolos tienen un sentido completamente nuevo). Definiremos la *multiplicación* de nuestros números exactamente igual que en la Aritmética habitual, o sea, mediante la siguiente «tabla de multiplicar»:

| · | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

mientras que la *adición* la definiremos «casi de la forma corriente», o sea, con la única diferencia de la Aritmética habitual consistente en que la suma $1 + 1$ será ahora de nuevo igual a 1 y no a 2 (pues este número simplemente no existe en nuestra «álgebra de los dos números»). De este modo, la «tabla de sumar» tiene en nuestra álgebra la forma

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Es obvio, que en el álgebra así definida tienen lugar ambas leyes conmutativas:

$a + b = b + a$ y $ab = ba$ para cualesquiera $a$ y $b$.

Es fácil comprobar que también se cumplen en ella las leyes asociativas

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)\, c = a\, (bc)$$

para cualesquiera $a$, $b$ y $c$,

con la particularidad de que ni siquiera hace falta comprobar la ley asociativa para la multiplicación, pues nuestra multiplicación nueva coincide íntegramente con la multiplicación de los números y para ésta la ley asociativa es válida. También es fácil ver que tienen lugar aquí las leyes idempotentes:

$$a + a = a \quad \text{y} \quad aa = a \quad \text{para cualquier } a,$$

o sea, para $a = 0$ y para $a = 1$ (¡he aquí el porqué hemos tomado $1 + 1 = 1$!). Algo más difícil resulta comprobar las leyes distributivas

$$(a + b)\,c = ac + bc \ \text{ y } \ ab + c = (a + c)\,(b + c)$$
$$\text{para cualesquiera } \ a,\ b \text{ y } c.$$

Por ejemplo, en nuestra álgebra

$$(1 + 1)\cdot 1 = 1\cdot 1 = 1 \ \text{ y } \ (1\cdot 1) + (1\cdot 1) = 1 + 1 = 1;$$

$$(1\cdot 1) + 1 = 1 + 1 = 1 \quad \text{y} \quad (1 + 1)\cdot(1 + 1) = 1\cdot 1 = 1.$$

Finalmente, si convenimos en asignar al número 0 el papel del elemento $O$ de nuestra álgebra y al número 1 el papel del elemento $I$, tendrán lugar también las reglas referentes a los elementos especiales $O$ e $I$: siempre (o sea, para $a = 0$ y para $a = 1$)

$$a + 0 = a \text{ y } a\cdot 1 = a; \qquad a + 1 = 1 \text{ y } a\cdot 0 = 0.$$

**Ejemplo 2.** ***Algebra de los cuatro números.*** He aquí un ejemplo algo más complejo aunque del mismo género. Supongamos que los elementos del álgebra son cuatro «números» que indicaremos con las cifras 0 y 1 y con las letras $p$ y $q$. Definiremos la ***adición*** y la ***multiplicación*** en el álgebra considerada con las tablas siguientes:

| $+$ | 0 | $p$ | $q$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $p$ | $q$ | 1 |
| $p$ | $p$ | $p$ | 1 | 1 |
| $q$ | $q$ | 1 | $q$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $\cdot$ | 0 | $p$ | $q$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $p$ | 0 | $p$ | 0 | $p$ |
| $q$ | 0 | 0 | $q$ | $q$ |
| 1 | 0 | $p$ | $q$ | 1 |

También aquí, como es fácil persuadirse mediante la comprobación directa,

$$a + b = b + a \ \text{ y } \ ab = ba \ \text{ para cualesquiera } \ a \text{ y } b;$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \ \text{ y } \ (ab)\,c = a\,(bc)$$
$$\text{para cualesquiera } \ a,\ b \text{ y } c;$$
$$(a + b)\,c = ac + bc \quad \text{y} \quad ab + c = (a + c)\,(b + c)$$
$$\text{para cualesquiera } \ a,\ b \text{ y } c;$$
$$a + a = a \quad \text{y} \quad aa = a \ \text{ para cualquier } a$$
$$(\text{o sea, para } a = 0,\ p,\ q \text{ y } 1).$$

Además, los números 0 y 1 desempeñan aquí el papel de los elementos $O$ e $I$ del álgebra de los conjuntos ya que para cualquier $a$

$$a + 0 = a \text{ y } a \cdot 1 = a; \qquad a + 1 = 1 \text{ y } a \cdot 0 = 0.$$

**Ejemplo 3.** *Algebra de los máximos y los mínimos.* Tomemos como los elementos de nuestra álgebra un conjunto (acotado) de números, por ejemplo, aceptemos que estos elementos son algunos números $x$ (o, posiblemente, *todos ellos*) tales que $0 \leqslant x \leqslant 1$, o sea, los números comprendidos entre 0 y 1 incluyendo los propios números 0 y 1. En cuanto a las operaciones de adición y multiplicación, las definiremos de un modo enteramente nuevo y, para no confundirlas con la adición y la multiplicación corrientes, emplearemos incluso signos nuevos: $\oplus$ (adición) y $\otimes$ (multiplicación). A saber, aceptaremos que la *suma* $x \oplus y$ de dos números $x$ e $y$ es igual al **mayor** de éstos (o a cualquiera de ellos si $x = y$); entenderemos por *producto* $x \otimes y$ de los números $x$ e $y$ el **menor** de éstos (o cualquiera de ellos si $x = y$). Por ejemplo, si los elementos de nuestra álgebra son los números 0, $^1/_3$, $^1/_2$, $^2/_3$ y 1, la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» de nuestros números tienen la forma

| $\oplus$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $\otimes$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 |

En las Matemáticas, el mayor de dos o varios números $u$, $v$, . . ., $z$ suele designarse así: máx $[u, v, \ldots, z]$ y el menor de estos números, por el símbolo mín $[u, v, \ldots, z]$[1]). De esta

[1]) máx $[u, v, \ldots, z]$ y mín $[u, v, \ldots, z]$ se puede leer, respectivamente, como «máximo de $u, v, \ldots, z$» y «mínimo de $u, v, \ldots, z$».

forma, en nuestra «álgebra de los máximos y los mínimos», por definición

$$x \oplus y = \text{máx}\,[x, y] \quad \text{y} \quad x \otimes y = \text{mín}\,[x, y].$$

Podemos también convenir en representar los números por medio de puntos de la recta numérica; entonces, los números $x$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$, quedarán representados por los puntos del




FIG. 11

segmento horizontal de longitud 1, la suma $x \oplus y$ de dos números $x$ e $y$ por aquél de los puntos $x$ o $y$ que se halla **a la derecha** y el producto $x \otimes y$ por el punto situado **a la izquierda** (fig. 11).

Está claro que nuestras nuevas operaciones de adición y multiplicación satisfacen las leyes conmutativas:

$$x \oplus y = y \oplus x \quad \text{y} \quad x \otimes y = y \otimes x.$$

También se cumplen obviamente las leyes asociativas

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) \text{ y } (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \oplus z);$$

así, el número $(x \oplus y) \oplus z$ o $x \oplus (y \oplus z)$ —que se puede indicar simplemente por $x \oplus y \oplus z$ omitiendo los paréntesis

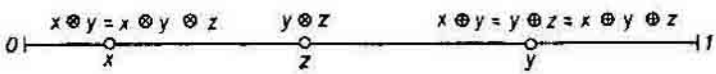



FIG. 12

es el máx $[x, y, z]$ (fig. 12) y el número $(x \otimes y) \otimes z$ o $x \otimes \otimes (y \otimes z)$ —o simplemente $x \otimes y \otimes z$, sin los paréntesis— es el mín $[x, y, z]$ (véase de nuevo la fig. 12). No menos claro está que también las leyes idempotentes tienen lugar aquí:

$$x \oplus x = \text{máx}\,[x, x] = x \text{ y } x \otimes x = \text{mín}\,[x, x] = x.$$

Comprobemos, finalmente, la validez de las leyes distributivas

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

y

$$(x \otimes y) \oplus z = (x \oplus z) \otimes (y \oplus z).$$

Está claro que el número

$$(x \oplus y) \otimes z = \text{mín}\ \{\text{máx}\ [x, y, z]\}$$

es igual a $z$ si *al menos uno de los números $x$ o $y$ es* **mayor** *que $z$* y es igual al mayor de estos números si *ambos son* **menores**

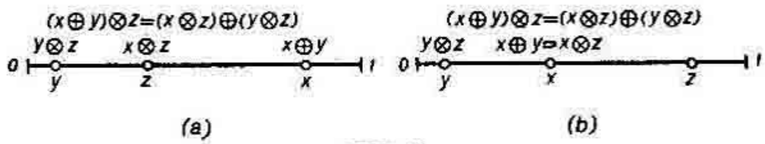



FIG. 13

*que $z$* (fig. 13, *a* y *b*). Pero a esto mismo exactamente es igual también el número

$$(x \otimes z) \oplus (y \otimes z) = \text{máx}\ \{\text{mín}\ [x, z],\ \text{mín}\ [y, z]\}$$

(véase de nuevo la fig. 13). De un modo análogo, el número

$$(x \otimes y) \oplus z = \text{máx}\ \{\text{mín}\ [x, y, z]\}$$

es igual a $z$ si *al menos uno de los números $x$ o $y$ es* **menor** *que $z$* y es igual al menor de estos números si *ambos son* **mayores**

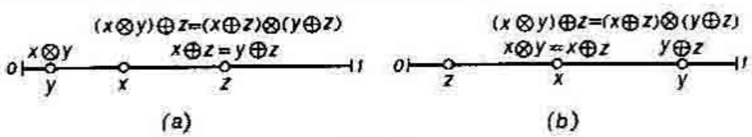



FIG. 14

*que $z$* (fig. 14, *a* y *b*). Pero a esto mismo es igual también el número

$$(x \oplus z) \otimes (y \oplus z) = \text{mín}\ \{\text{máx}\ [x, z],\ \text{máx}\ [y, z]\}$$

(véase de nuevo la fig. 14).

Para persuadirnos ahora de que en nuestra álgebra específica se cumplen todas las leyes del álgebra de los conjuntos, bastará señalar solamente que el papel de los elementos $O$ e $I$ del álgebra de los conjuntos lo desempeñan aquí el menor de los números considerados —el número 0— y el mayor de estos números —el número 1. En efecto, cualquiera que sea el número $x$, donde $0 \leqslant x \leqslant 1$, siempre

$$x \oplus 0 = \text{máx}\,[x, 0] = x \text{ y } x \otimes 1 = \text{mín}\,[x, 1] = x;$$

$$x \oplus 1 = \text{máx}\,[x, 1] = 1 \text{ y } x \otimes 0 = \text{mín}\,[x, 0] = 0.$$

**Ejemplo 4.** *Algebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores.* Sea $N$ un número entero positivo cualquiera; tomemos como elementos de nuestra álgebra nueva todos los posibles **divisores** del número $N$; por ejemplo, si $N = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, los elementos del álgebra considerada son los números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 y 210. La adición y la multiplicación de nuestros números las definiremos ahora de una forma completamente nueva: entenderemos por *suma* $m \oplus n$ de los números $m$ y $n$ el **mínimo común múltiplo** de los mismos, o sea, el menor número entero (positivo) que es divisible por ambos números $m$ y $n$; tomaremos como *producto* $m \otimes n$ de los números $m$ y $n$ el **máximo común divisor** de estos números, o sea, el mayor número entero que divide a $m$ y a $n$. Por ejemplo, si $N = 6$ y nuestra álgebra contiene solamente cuatro números 1, 2, 3 y 6, la adición y la multiplicación de los números vienen dadas por las tablas siguientes:

| $\oplus$ | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 2 | 6 | 6 |
| 3 | 3 | 6 | 3 | 6 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

| $\otimes$ | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 3 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 6 |

En la «Aritmética superior» (teoría de los números), el mínimo común múltiplo de dos o varios números $m, n, \ldots, s$ se designa frecuentemente por $[m, n, \ldots, s]$ y el máximo común divisor de estos mismo números, por $(m, n, \ldots, s)$.

De esta forma, en nuestra álgebra por definición

$$m \oplus n = [m, n] \quad \text{y} \quad m \otimes n = (m, n).$$

Por ejemplo, si el álgebra contiene los números 10 y 15, entonces

$$10 \oplus 15 = [10, 15] = 30 \text{ y } 10 \otimes 15 = (10, 15) = 5.$$

Es evidente que en nuestra álgebra siempre

$$m \oplus n = n \oplus m \quad \text{y} \quad m \otimes n = n \otimes m.$$

Además, aquí

$$(m \oplus n) \oplus p = m \oplus (n \oplus p) \qquad (= [m,\ n,\ p])$$

(podemos convenir en indicar este número simplemente por $m \oplus n \oplus p$ omitiendo los paréntesis) y

$$(m \otimes n) \otimes p = m \otimes (n \otimes p) \qquad (= (m,\ n,\ p))$$

(este número se puede indicar simplemente por $m \otimes n \otimes p$). No menos evidentes son las leyes idempotentes:

$$m \oplus m = [m,\ m] = m \quad \text{y} \quad m \otimes m = (m,\ m) = m.$$

Algo más difícil (como siempre) resulta comprobar las leyes distributivas. El número

$$(m \oplus n) \otimes p = ([m,\ n],\ p)$$

no es otra cosa que *el máximo común divisor del número p y del mínimo común múltiplo de los números m y n* ( ¡reflexiona bien en el sentido de esta frase!); contiene aquellos, y sólo aquellos, factores primos que figuran en la descomposición de $p$ y al mismo tiempo en la descomposición de *uno* de los números $m$ o $n$ **por lo menos**. Pero está claro que estos factores primos (y sólo estos) figuran también en la descomposición del número

$$(m \otimes p) \oplus (n \otimes p) = [(m, p),\ (n, p)];$$

por eso, siempre

$$(m \oplus n) \otimes p = (m \otimes p) \oplus (n \otimes p).$$

Por ejemplo, si los números se toman del conjunto de los divisores del número 210, tenemos

$$(10 \oplus 14) \otimes 105 = ([10, 14], 105) = (70, 105) = 35$$

y

$$(10 \otimes 105) \oplus (14 \otimes 105) = [(10, 105), (14, 105)] =$$
$$= [5, 7] = 35.$$

Análogamente, el número

$$(m \otimes n) \oplus p = [(m, n), p]$$

es *el mínimo común múltiplo del número p y del máximo común divisor de los números m y n*; contiene aquellos factores primos (y sólo aquellos) que figuran en la descomposición de $p$ o bien en la descomposición de ambos números $m$ y $n$ (o, posiblemente, en la descomposición de $p$ y en la descomposición de ambos números $m$ y $n$). Pero estos mismos factores exactamente contiene también el número

$$(m \oplus p) \otimes (n \oplus p) = ([m, p], [n, p])$$

y, por eso, siempre

$$(m \otimes n) \oplus p = (m \oplus p) \otimes (n \oplus p).$$

Por ejemplo,

$$(10 \otimes 14) \oplus 105 = [(10, 14), 105] = [2, 105] = 210$$

y

$$(10 \oplus 105) \otimes (14 \oplus 105) = ([10, 105], [14, 105]) =$$
$$= (210, 210) = 210.$$

Finalmente, el papel de los elementos $O$ e $I$ del álgebra de los conjuntos lo desempeñan aquí el menor de los números de la colección considerada —el número 1— y el mayor de ellos —el número $N$. En efecto, es evidente que

$$m \oplus 1 = [m, 1] = m \quad \text{y} \quad m \otimes N = (m, N) = m;$$
$$m \oplus N = [m, N] = N \quad \text{y} \quad m \otimes 1 = (m, 1) = m$$

(no olvides que en nuestra álgebra figuran los divisores del número $N$ solamente). De esta forma, también aquí se cumplen todas las leyes del álgebra de los conjuntos.

Vemos, pues, que existe una cantidad suficientemente amplia de diversos sistemas de «objetos» (*elementos* del álge-



GEORGE BOOLE (1815—1864)

bra considerada) en los cuales se pueden definir las operaciones de *adición* y *multiplicación* que satisfacen todas las reglas que sabemos se cumplen en el álgebra de los conjuntos: dos leyes conmutativas, dos leyes asociativas, dos leyes distributivas, dos leyes idempotentes y cuatro reglas determinantes de las propiedades de los elementos «especiales» que en nuestras álgebras desempeñan un papel próximo al que desempeñan el cero y la unidad. Más tarde veremos otros dos ejemplos, muy importantes e interesantes, de tales álgebras.

Ahora, al pasar al estudio de las propiedades generales de todas estas álgebras, debemos, ante todo, darles un nombre genérico. Actualmente todas ellas se denominan **álgebras**

de Boole[1]) ya que fue George Boole[2]), destacado matemático inglés del siglo XIX, quien por primera vez estudió las álgebras de propiedades tan extrañas. Conservaremos los nombres de «adición» y «multiplicación» para las operaciones principales del álgebra de Boole (pero debes recordar que no son la adición y multiplicación corrientes de los números); sin embargo, a veces denominaremos estas operaciones *adición booleana* y *multiplicación booleana*.

La obra de G. Boole, consagrada al examen minucioso del álgebra extraordinaria al que está dedicado este folleto, apareció por primera vez en 1854, o sea, hace más de 100 años, bajo el título de «Investigación de las leyes del pensamiento» («Investigation of the laws of thought»). Posiblemente este título te parece por ahora extraño; pero después de leer este folleto, comprenderás qué relación existe entre las leyes de nuestro pensamiento y las álgebras extraordinarias que aquí se analizan. Notemos sólo que precisamente esta conexión entre las álgebras de Boole y las «leyes del pensamiento» explica por qué la obra de Boole, que inicialmente pasó desapercibida para los matemáticos, despierta hoy tan gran interés. Durante los últimos años esta obra ha sido varias veces reeditada y traducida a distintos idiomas; en muchos países el concepto de álgebra de Boole ya figura, de una u otra forma, en el curso escolar de las Matemáticas; en otros países, entre ellos la URSS, la idea de incluir este concepto en el curso de la enseñanza media se está debatiendo activamente y tiene ardientes adictos entre los matemáticos y los pedagogos.

EJERCICIOS

1. Comprueba directamente que para todas las ternas de elementos del «álgebra de Boole de los dos números» (ejemplo 1, pág. 25) son válidas ambas leyes distributivas.

[1]) En el apéndice (pág. 76) damos la definición exacta de las álgebras de Boole.

[2]) Padre de la escritora inglesa Etel Lilian Boole (más conocida por el apellido de su marido M. Voinicz, revolucionario polaco), autora de la novela «El Tábano».

2. Comprueba ambas leyes distributivas para algunas ternas de elementos del «álgebra de Boole de los cuatro elementos» (ejemplo 2, pág. 26).

3. a) Si en tu apartamento no hay más escolares que tú, los «conjuntos de escolares de tu apartamento» son: el conjunto $I$ que consta de un escolar y el conjunto $O$ que no contiene escolares (conjunto vacío). Forma para el «álgebra de los conjuntos de escolares que residen en tu apartamento» (esta álgebra contiene dos elementos, $O$ e $I$, solamente) la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» y compáralas con las tablas de la pág. 25; deduce de aquí que para el «álgebra de los dos números» considerada en el ejemplo 1 de este parágrafo se cumplen efectivamente todas las leyes del álgebra de Boole.

b) Supongamos que en un apartamento viven dos escolares, Pedro y Catalina. Entonces el «álgebra de los conjuntos de escolares que residen en este apartamento» contiene cuatro elementos: el conjunto $I$ que comprende dos escolares; dos conjuntos $P$ (Pedro) y $C$ (Catalina) formado cada uno por un escolar; el conjunto vacío $O$. Forma la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» para esta álgebra de los conjuntos y compáralas con las tablas de la pág. 26; deduce de aquí que para el «álgebra de los cuatro números» considerada en el ejemplo 2 de este parágrafo se cumplen todas las leyes del álgebra de Boole.

4. Comprueba que

a) $$\text{mín}\left\{\text{máx}\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right],\ \frac{1}{4}\right\} = \text{máx}\left\{\text{mín}\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right],\ \text{mín}\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right]\right\}$$

y

$$\text{máx}\left\{\text{mín}\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right],\ \frac{1}{4}\right\} = \text{mín}\left\{\text{máx}\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right],\ \text{máx}\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right]\right\},$$

b) $$([12,\ 30],\ 8) = [(12,\ 8),\ (30,\ 8)]$$

y

$$[(12,\ 30),\ 8] = ([12,\ 8],\ [30,\ 8]).$$

5. a) Forma la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» para el álgebra de Boole de los tres números 0, $\frac{1}{2}$ y 1, donde $x \oplus y = \text{máx}\,[x,\ y]$ y $x \otimes y = \text{mín}\,[x,\ y]$; comprueba que en esta álgebra se cumplen las leyes del álgebra de Boole.

b) Forma la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» para el álgebra formada por los divisores del número 12, donde $m \oplus n = [m,\ n]$ y $m \otimes n = (m,\ n)$; comprueba que en esta álgebra se cumplen algunas de las leyes del álgebra de Boole.

6*. Supongamos que la descomposición en factores primos de un número $N$ (entero positivo) es de la forma

$$N = p_1^{A_1} p_2^{A_2} \ldots p_h^{A_h};$$

entonces dos cualesquiera divisores $m$ y $n$ de este número se pueden representar en la forma

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$

donde $0 \leqslant a_1 \leqslant A_1,\ 0 \leqslant a_2 \leqslant A_2,\ \ldots,\ 0 \leqslant a_k \leqslant A_k$, y

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_k^{b_k},$$

donde $0 \leqslant b_1 \leqslant A_1,\ 0 \leqslant b_2 \leqslant A_2,\ \ldots,\ 0 \leqslant b_k \leqslant A_k$ (algunos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ pueden resultar iguales a cero). ¿Qué forma tienen en este caso las descomposiciones en factores primos de los números $[m, n]$ (mínimo común múltiplo de los números $m$ y $n$) y $(m, n)$ (máximo común divisor de los números $m$ y $n$)? Emplea estas descomposiciones para demostrar que constituye un álgebra de Boole el conjunto de todos los divisores del número $N$ con las operaciones $m \oplus n = [m, n]$ y $m \otimes n = (m, n)$.

## § 3.

## OTRAS PROPIEDADES DE LAS ÁLGEBRAS DE BOOLE: PRINCIPIO DE DUALIDAD; IGUALDADES Y DESIGUALDADES BOOLEANAS

Prosigamos el estudio del álgebra extraordinaria que hemos denominado álgebra de Boole. Ante todo, salta a la vista el paralelismo completo que existe entre las propiedades de la adición booleana y de la multiplicación booleana: estas propiedades son tan similares que *en toda fórmula* (¡correcta, por supuesto!) *del álgebra de Boole se puede sustituir la adición por la multiplicación, y viceversa*; la fórmula seguirá siendo válida. Por ejemplo, en el álgebra de Boole se cumple la igualdad

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC$$

como lo hemos demostrado anteriormente (véase el ejemplo considerado al final de los ejercicios del § 1, pág. 22). Sustituyendo en esta igualdad la adición por la multiplicación,

y viceversa, obtenemos la igualdad

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

que también es válida (véase el ejemplo de la pág. 38). Sólo debe tenerse en cuenta que *si en una igualdad del álgebra de Boole figuran los elementos especiales O e I, al sustituir la adición booleana por la multiplicación booleana, y viceversa, deberemos sustituir el elemento O por I y el elemento I por O.* Por ejemplo, es válida la igualdad

$$(A + B)(A + I) + (A + B)(B + O) = A + B$$

(véase el ejercicio 8 de la pág. 22); de aquí resulta que también tiene lugar la igualdad

$$(AB + AO)(AB + BI) = AB.$$

Esta propiedad de las álgebras de Boole que permite «gratuitamente» (o sea, sin demostración) obtener de cada igualdad otra nueva[1]) lleva el nombre de *principio de dualidad* y las igualdades, que resultan una de otra por medio de este principio, se denominan *duales* unas respecto a otras. El principio de dualidad se deduce de que la lista de las leyes principales del álgebra de Boole —que son las únicas que podemos emplear al demostrar una u otra *fórmula booleana*— es perfectamente «simétrica»: con cada ley contiene otra, dual de la primera, es decir, que se obtiene de aquélla sustituyendo

[1]) Puede suceder que la igualdad «nueva» (que se obtiene sustituyendo en una fórmula del álgebra de Boole la adición por la multiplicación, y viceversa) coincida con la inicial y en este caso nuestro procedimiento no arroja ventaja alguna. Por ejemplo, al sustituir la adición por la multiplicación, y viceversa, la igualdad correcta (véase el ejercicio 6 de la pág. 22)

$$(A + B)(B + C)(C + A) = AB + BC + CA$$

se transforma en la igualdad

$$AB + BC + CA = (A + B)(B + C)(C + A)$$

que coincide con la inicial; la igualdad (ejercicio 7, pág. 22)

$$(A + B)(B + C)(C + D) = AC + BC + BD$$

se transforma, al sustituir la multiplicación por la adición, y viceversa, en la igualdad

$$AB + BC + CD = (A + C)(B + C)(B + D)$$

que sólo insubstancialmente difiere de la inicial (se transforma en la inicial al sustituir la letra $B$ por la letra $C$ y la letra $C$ por la letra $B$).

la adición por la multiplicación, y viceversa, y el elemento $O$ por el elemento $I$, y viceversa. Así, la ley conmutativa de la adición es dual de la ley conmutativa de la multiplicación; la ley asociativa de la adición es dual de la ley asociativa de la multiplicación; la ley idempotente de la adición es dual de la ley idempotente de la multiplicación; la primera ley distributiva es dual de la segunda ley distributiva; por último, las igualdades $A + O = O$ y $A + I = I$ son duales de las igualdades $AI = A$ y $AO = O$, respectivamente. Por eso, si para demostrar una igualdad hemos empleado unas u otras leyes principales del álgebra de Boole, podemos demostrar de la misma forma exactamente, recurriendo a las leyes duales, también la igualdad dual de la inicial.

**Ejemplo.** Demostremos la igualdad

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

dual de la igualdad

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC.$$

En efecto,

$$A+AC+BC \underset{\substack{\text{ley asociativa}\\ \text{de la adición}}}{=} A+(AC+BC) \underset{\substack{1^{\text{a}}\text{ ley}\\ \text{distributiva}}}{=} A+(A+B)C =$$

$$\underset{\substack{\text{ley conmutativa}\\ \text{de la adición}}}{=} (A+B)C+A \underset{\substack{1^{\text{a}}\text{ ley}\\ \text{distributiva}}}{=} [(A+B)+A](C+A) =$$

$$\underset{\substack{\text{leyes conmutativa y asociativa}\\ \text{de la adición}}}{=} [(A+A)+B](A+C) =$$

$$\underset{\substack{\text{ley idempotente de la}\\ \text{adición}}}{=} (A+B)(A+C)$$

(compara con la demostración de la igualdad $A(A + C)(B + C) = AB + AC$ en la pág. 22).

Otra demostración del principio de dualidad está ligada a que en el álgebra de Boole existe una operación especial por cuyo efecto todo elemento $A$ de esta álgebra se transforma en un elemento nuevo $\bar{A}$ a la vez que *la adición se transforma en la multiplicación, y viceversa*. En otras palabras, esta operación (que denominaremos operación «*raya*») es tal que

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} \quad \text{y} \quad \overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}.$$

Además,

$$\bar{O} = I \quad \text{e} \quad \bar{I} = O.$$

Finalmente, por efecto de la operación «raya» el elemento $\overline{\overline{A}}$ se transforma en el elemento inicial $A$, o sea, para todo elemento $A$ del álgebra de Boole

$$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A.$$

En el *álgebra de los conjuntos* la operación «raya» (esta operación específica permite obtener un nuevo elemento del álgebra de Boole a partir de *uno* y no de dos elementos dados como es el caso de las operaciones de adición y multiplicación) tiene el siguiente significado. Entendemos por $\overline{A}$ el

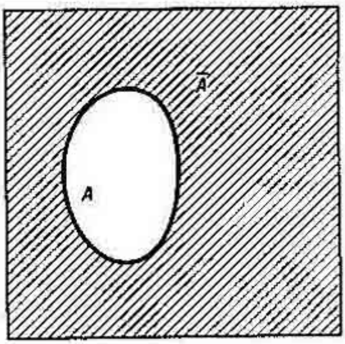



FIG. 15

*complemento* del conjunto $A$, o sea, *el conjunto formado por aquellos elementos del conjunto universo* $I$, *y sólo aquellos, que* no constan *en el conjunto* $A$ (fig. 15). Por ejemplo, si el conjunto universo representa el conjunto de todos los alumnos de tu clase y $A$ es el conjunto de los alumnos suspendidos como mínimo en una de las asignaturas del primer trimestre (el conjunto de los alumnos atrasados), entonces $\overline{A}$ es el conjunto de los alumnos que han sacado no menos de «satisfactorio» en todas las asignaturas (el conjunto de los alumnos adelantados).

De la definición misma del complemento $\overline{A}$ del conjunto $A$ se deduce que

$$\overline{\overline{A}}=\overline{(\overline{A})}=A$$

y que

$$A+\bar{A}=I \quad \text{y} \quad A\bar{A}=0$$

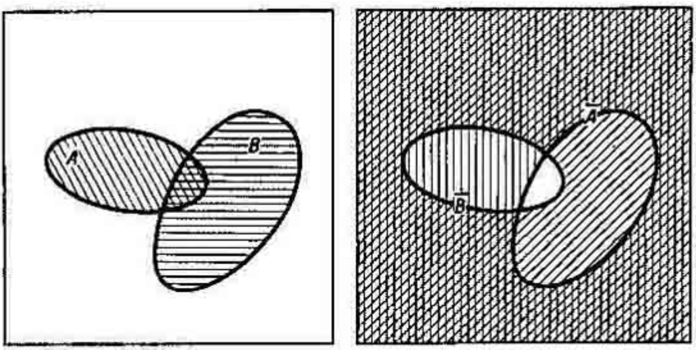
(véase la misma fig. 15; las dos últimas igualdades pueden servir incluso de *definición* del conjunto $\bar{A}$). Es evidente también que

$$\bar{O}=I \quad \text{e} \quad \bar{I}=O.$$

Demostremos finalmente que en el álgebra de los conjuntos se cumplen las propiedades más importantes de la operación «raya»:

$$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B} \quad \text{y} \quad \overline{AB}=\bar{A}+\bar{B};$$

estas reglas se denominan *reglas de Morgan* en memoria del matemático inglés Augustus **de Morgan** (1806-1871), contemporáneo y correligionario de George Boole. En la fig. 16, *a*




(a) (b)

FIG. 16

aparece sombreado, con líneas oblicuadas hacia la izquierda, el óvalo (el conjunto) $A$ y en la fig. 16, *b*, con líneas oblicuadas hacia la derecha, su complemento $\bar{A}$ hasta el cuadrado completo $I$; con líneas horizontales está sombreado en la fig. 16, *a* el óvalo (el conjunto) $\bar{B}$ y en la fig. 16, *b*, con líneas verticales, su complemento $\bar{B}$. En la fig. 16, *a* resulta sombreada la región $A+B$, mientras que en la fig. 16, *b* resulta doblemente sombreada la región $\bar{A}\bar{B}$. Pero comparando las

figuras 16, *a* y 16, *b*, se ve que la región doblemente sombreada en la fig. 16, *b* complementa la región sombreada en la fig. 16, *a*; con esto queda demostrada la primera regla de Morgan:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}.$$

Por otra parte, en la fig. 16, *a* resulta doblemente sombreada la región $AB$ y en la fig. 16, *b* resulta sombreada la región $\overline{A}+\overline{B}$. Estas dos regiones (conjuntos) son, obviamente, una complemento de la otra, es decir,

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}.$$

Señalemos ahora el significado de la operación «raya» en los demás ejemplos de álgebras de Boole considerados anteriormente. Así, en el álgebra de los dos números (ejemplo 1 de la pág. 25)

$$\overline{0}=1 \quad \text{y} \quad \overline{1}=0.$$

Es evidente que $\overline{\overline{a}}=a$ para cualquier elemento $a$ de esta álgebra (o sea, para $a=0$ y para $a=1$). Además, comparando la «tabla de sumar» y la «tabla de multiplicar» formada para los números $\overline{0}=1$ y $\overline{1}=0$:

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

y

| | $\overline{0}=1$ | $\overline{1}=0$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}=1$ | 1 | 0 |
| $\overline{1}=0$ | 0 | 0 |

se deduce que en todos los casos $\overline{a+b}=\overline{a}\overline{b}$; de un modo análogo se comprueba también la segunda regla de Morgan: $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$.

En el álgebra de los cuatro números (ejemplo 2 de la pág. 26)

$$\overline{0}=1, \quad \overline{p}=q, \quad \overline{q}=p \quad \text{y} \quad \overline{1}=0.$$

Es evidente de nuevo que $\overline{\overline{a}}=a$ cualquiera que sea el elemento $a$ de nuestra álgebra. Para comprobar la relación $\overline{a+b}=\overline{a}\overline{b}$, bastará comparar como antes dos tablas

| + | 0 | $p$ | $q$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $p$ | $q$ | 1 |
| $p$ | $p$ | $p$ | 1 | 1 |
| $q$ | $q$ | 1 | $q$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

y

| | $\overline{0}=1$ | $\overline{p}=q$ | $\overline{q}=p$ | $\overline{1}=0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}=1$ | 1 | $q$ | $p$ | 0 |
| $\overline{p}=q$ | $q$ | $q$ | 0 | 0 |
| $\overline{q}=p$ | $p$ | 0 | $p$ | 0 |
| $\overline{1}=0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Análogamente se comprueba también la relación $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$.

Pasemos ahora al álgebra de los máximos y los mínimos cuyos elementso son los números $x$ tales que $0 \leqslant x \leqslant 1$, mientras que la

adición booleana $\oplus$ y la multiplicación booleana $\otimes$ se definen así:

$$x \oplus y = \text{máx}\,[x, y] \quad \text{y} \quad x \otimes y = \text{mín}\,[x, y].$$

Para que en esta álgebra tengan lugar las reglas de Morgan

$$\overline{x \oplus y} = \bar{x} \otimes \bar{y} \quad \text{y} \quad \overline{x \otimes y} = \bar{x} \oplus \bar{y},$$

es decir, para que sea

$$\overline{\text{máx}\,[x, y]} = \text{mín}\,[\bar{x}, \bar{y}] \quad \text{y} \quad \overline{\text{mín}\,[x, y]} = \text{máx}\,[\bar{x}, \bar{y}],$$

hace falta solamente que la operación «raya» invierta el orden de los elementos, es decir, que de la condición $x \leqslant y$ se deduzca la condición

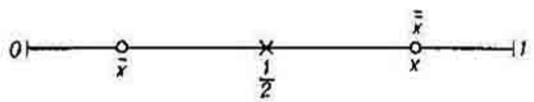



FIG. 17

$\bar{x} \geqslant \bar{y}$ (¿por qué?). Por eso si los elementos del álgebra son todos los números $x$ tales que $0 \leqslant x \leqslant 1$, podemos poner, por ejemplo,

$$\bar{x} = 1 - x;$$

en otras palabras, se puede aceptar que *el punto $\bar{x}$ es simétrico del punto $x$ respecto al centro $\frac{1}{2}$ del segmento* [0, 1] (fig. 17). En tal caso es evidente que

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0$$

y

$$\bar{\bar{x}} = x.$$

Por supuesto, tienen lugar también las reglas de Morgan

$$\overline{x \oplus y} = \bar{x} \otimes \bar{y} \quad \text{y} \quad \overline{x \otimes y} = \bar{x} \oplus \bar{y}$$

(véase la fig. 18, *a* y *b*).

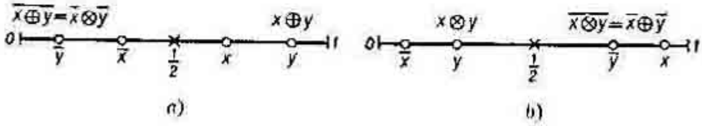



FIG. 18

Consideremos finalmente el álgebra de los mínimos múltiples y de los máximos divisores cuyos elementos son todos los divisores

posibles del número entero positivo $N$, mientras que la adición booleana $\oplus$ y la multiplicación booleana $\otimes$ se definen así

$$m \oplus n = [m, n] \quad \text{y} \quad m \otimes n = (m, n),$$

donde $[m, n]$ es el mínimo común múltiplo de los números $m$ y $n$ y $(m, n)$ es el máximo común divisor de éstos. Pongamos aquí

$$\bar{m} = \frac{N}{m};$$

por ejemplo, en el caso analizado anteriormente en el que $N = 210$

$$\bar{1} = 210,\ \bar{2} = 105,\ \bar{3} = 70,\ \bar{5} = 42,\ \bar{6} = 35,\ \bar{7} = 30,$$

$$\overline{10} = 21,\ \overline{14} = 15,\ \overline{15} = 14,\ \overline{21} = 10,\ \overline{30} = 7,$$

$$\overline{35} = 6,\ \overline{42} = 5,\ \overline{70} = 3,\ \overline{105} = 2,\ \overline{210} = 1.$$

Está claro que

$$\bar{1} = N \quad \text{y} \quad \bar{N} = 1.$$

Además, es evidente que

$$\bar{\bar{m}} = \frac{N}{N/m} = m.$$

También aquí tienen lugar las reglas de Morgan:

$$\overline{m \oplus n} = \bar{m} \otimes \bar{n} \quad \text{y} \quad \overline{m \otimes n} = \bar{m} \oplus \bar{n};$$

por ejemplo,

$$6 \oplus 21 = [6, 21] = 42,$$

$$\bar{6} \otimes \overline{21} = 35 \otimes 10 = (35, 10) = 5 \quad \text{y} \quad \overline{42} = 5$$

y

$$6 \otimes 21 = (6, 21) = 3,$$

$$\bar{6} \oplus \overline{21} = 35 \oplus 10 = [35, 10] = 70 \quad \text{y} \quad \bar{3} = 70.$$

Dejamos a cargo del lector la demostración completa de las reglas de Morgan (véase a este respecto el ejercicio 6 de la pág. 50)

Supongamos ahora que tenemos una igualdad que se cumple en cualquier álgebra de Boole; por ejemplo, la igualdad ya conocida

$$A(A + C)(B + C) = AB + AC.$$

Aplicando a ambos miembros de esta igualdad la operación «raya», obtenemos

$$\overline{A(A+C)(B+C)} = \overline{AB + AC}.$$

Pero, en virtud de las reglas de Morgan,

$$\overline{A(A+C)(B+C)} = \overline{[A(A+C)](B+C)} =$$
$$= \overline{A(A+C)} + \overline{B+C} = \bar{A} + \overline{A+C} + \bar{B}\bar{C} = \bar{A} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

y

$$\overline{AB+AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(\bar{A}+\bar{B})(\bar{A}+\bar{C}).$$

De este modo, tenemos en definitiva

$$\bar{A}+\bar{A}\,\bar{C}+\bar{B}\,\bar{C}=(\bar{A}+\bar{B})(\bar{A}+\bar{C}).$$

Pero como esta igualdad se cumple para *cualesquiera* $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$, continuará siendo válida si designamos los elementos $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ de nuestra álgebra de Boole simplemente por las letras $A$, $B$ y $C$; entonces llegaremos precisamente a la igualdad

$$A + AC + BC = (A + B)(A + C)$$

dual de la igualdad inicial.

Es así cómo de las propiedades de la operación «raya» (y, en primer lugar, de las reglas de Morgan) resulta el principio de dualidad. Sólo no debemos olvidar que si la igualdad inicial comprende los elementos «especiales» $O$ o $I$, entonces, debido a las igualdades,

$$\bar{O}=I \quad \text{e} \quad \bar{I}=O,$$

en la igualdad transformada (dual) aparecerá $I$ en lugar de $O$ y $O$ en lugar de $I$.

Por ejemplo, aplicando la operación «raya» a ambos miembros de la igualdad

$$A(A+I)(B+O)=AB$$

(véase el ejercicio 5 de la pág. 22), obtenemos

$$\overline{A(A+I)(B+O)}=\overline{AB}$$

o, puesto que

$$\overline{A(A+I)(B+O)}=\overline{A}\,\overline{(A+I)}+\overline{B+O}=$$
$$=\bar{A}+\overline{A+I}+\overline{B+O}=\bar{A}+\overline{AI}+\overline{BO}=\bar{A}+\bar{A}O+\bar{B}I$$

y

$$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B},$$

la igualdad

$$\bar{A}+\bar{A}O+\bar{B}I=\bar{A}+\bar{B}.$$

Pero la última igualdad (en la que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son arbitrarios) es equivalente a la siguiente

$$A + AO + BI = A + B$$

que se obtiene de la igualdad inicial *al sustituir la suma por el producto, y viceversa, así como el elemento O por el elemento I, y viceversa.*

Es notorio que el principio de dualidad tiene un campo de aplicación incluso más amplio que el señalado: aparte de las igualdades booleanas se puede aplicar también en las «desigualdades booleanas». Pero para explicar esto deberemos, ante todo, estudiar un concepto más que desempeña un papel importantísimo en la teoría de las álgebras de Boole.

En toda álgebra de Boole, además del concepto de igualdad de elementos de este álgebra (la igualdad $A = B$ significa que $A$ y $B$ vienen a ser simplemente *un mismo* elemento del álgebra de Boole), existe otra relación importante entre los elementos que desempeña aproximadamente el mismo papel que desempeña en el álgebra de los números la relación «mayor que» (o «menor que»). Esta relación se indica con el símbolo $\supset$ (o $\subset$) y se escribe

$$A \supset B \quad \text{o} \quad B \subset A$$

(las dos últimas relaciones tienen el mismo sentido; fíjate en que se asemejan a las fórmulas $a > b$ y $b < a$); en el álgebra de los conjuntos, la relación $A \supset B$ significa que *el*

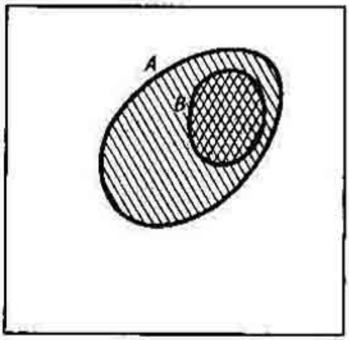



FIG. 19

*conjunto A contiene, en tanto que una parte suya, el conjunto B* (fig. 19). Por ejemplo, si $A_2$ es el conjunto de los números pares y $A_6$ es el conjunto de los números enteros divisibles por 6, entonces es obvio que $A_2 \supset A_6$; del mismo modo exactamente, si $A$ es el conjunto de los alumnos avanzados de tu clase y $B$ es el conjunto de los alumnos que estudian en sobresaliente, entonces, por supuesto, $A \supset B$. Debe sólo tenerse

en cuenta que también escribiremos $A \supset B$ si los conjuntos $A$ y $B$ *coinciden*, pues también en este caso el conjunto $B$ está contenido íntegramente en el conjunto $A$. De este modo, la relación $\supset$ para elementos del álgebra de Boole se asemeja más a la relación $\geqslant$ («mayor o igual que») para los números que a la relación $>$ («mayor que»).

Está claro que

$$\text{si} \quad A \supset B \quad \text{y} \quad B \supset C, \quad \text{entonces} \quad A \supset C$$

(fig. 20); de una forma análoga, para los números, de las

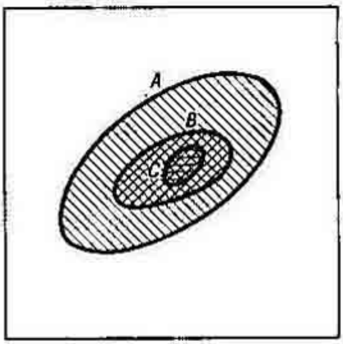



FIG. 20




FIG. 21

relaciones $a \geqslant b$ y $b \geqslant c$ se deduce que $a \geqslant c$. Además,

$$\text{si} \quad A \supset B \quad \text{y} \quad B \supset A, \quad \text{entonces} \quad A = B,$$

lo mismo que para los números de las relaciones $a \geqslant b$ y $b \geqslant a$ se desprende que $a = b$. Por último (y ello es muy importante para nosotros)

$$\text{si } A \supset B, \text{ entonces } A \subset B$$

(fig. 21). Así, el conjunto de los alumnos avanzados es mayor que el conjunto de los alumnos que estudian en sobresaliente y de ello resulta que el conjunto de los alumnos atrasados está contenido en el conjunto de los alumnos que no estudian en sobresaliente.

Hasta aquí hemos venido subrayando la semejanza existente entre la relación $\supset$ para los conjuntos y la relación $\geqslant$ para los números. Señalemos ahora una diferencia substancial

entre estas relaciones. Dos números (reales) $a$ y $b$ cualesquiera siempre pueden ser comparados, es decir, necesariamente tiene lugar una de las relaciones $a \geqslant b$ o $b \geqslant a$[1]). Por

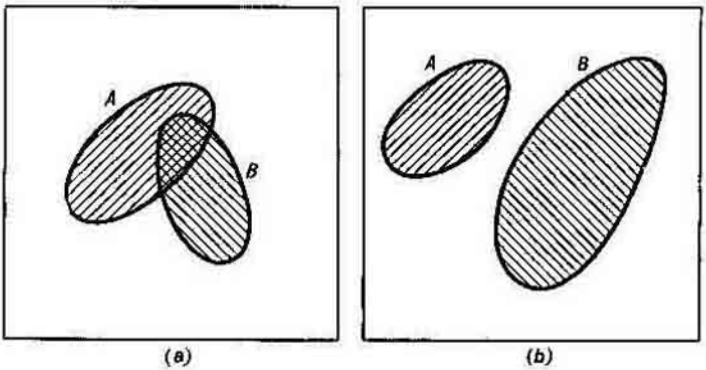



FIG. 22

contraposición, para dos conjuntos $A$ y $B$ no se cumple, como regla, ninguna de las relaciones $A \supset B$ y $B \supset A$ (fig. 22).

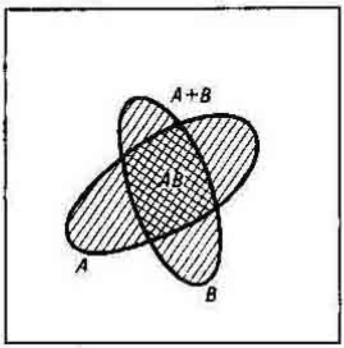



FIG. 23

Notemos además que

$$I \supset A \quad \text{y} \quad A \supset O$$

[1]) Si tienen lugar a la vez ambas relaciones, los números $a$ y $b$ son iguales.

cualquiera que sea el elemento $A$ del álgebra de los conjuntos y que siempre (o sea, para cualesquiera $A$ y $B$)

$$A + B \supset A \quad \text{y} \quad AB \subset A$$

(fig. 23).

Señalemos el significado de la relación $\supset$ en las demás álgebras de Boole que conocemos. En el «álgebra de los dos números» (ejemplo 1 de la pág. 25) esta relación se establece mediante la condición

$$1 \supset 0$$

y en el «álgebra de los cuatro números» (ejemplo 2 de la pág. 26) mediante las condiciones

$$1 \supset 0, \quad 1 \supset p, \quad 1 \supset q, \quad p \supset 0 \quad \text{y} \quad q \supset 0$$

(los elementos $p$ y $q$ de esta álgebra son *incomparables*, o sea, no tiene lugar ninguna de las relaciones $p \supset q$ y $q \supset p$). En el «álgebra de los máximos y los mínimos» (ejemplo 3 de la pág. 27) la relación $\supset$ coincide con la relación $\geqslant$: consideramos que los elementos $x$ e $y$ están vinculados por la relación $x \supset y$ si el número $x$ no es menor que el número $y$ (por ejemplo, aquí $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{3}$ y $1 \supset 1$)[1]. Por último, en el «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores» (ejemplo 4 de la pág. 30) la relación $m \supset n$ significa que el número $n$ es divisor del número $m$; por ejemplo, aquí $42 \supset 6$, mientras que los números 42 y 35 de esta álgebra son incomparables (o sea, no tiene lugar ninguna de las relaciones $42 \supset 35$ y $42 \subset 35$). Proponemos al lector demostrar que la relación $\supset$, definida de esta forma en cada una de las álgebras de Boole enumeradas, posee todas las propiedades que hemos señalado para la relación $\supset$ en el álgebra de los conjuntos

Es natural denominar *desigualdad booleana* toda fórmula cuyos primer y segundo términos están vinculados por la relación $\supset$ (o $\subset$). Trataremos sólo de las desigualdades válidas para todos los valores de los elementos $A, B, C, \ldots$ del álgebra de Boole que figuran en la desigualdad, como son las desigualdades $I \supset A$, $A \supset O$, $A + B \supset A$ o $A \supset AB$ mencionadas anteriormente. **El principio de dualidad** afirma que *si en una desigualdad de este tipo sustituimos la adición por la multiplicación, y viceversa, el elemento* $O$ (si es que figura en nuestra desigualdad) *por el elemento* $I$, *y viceversa*, **y si cambiamos el signo de la desigualdad por el signo contrario** (o sea, si sustituimos la relación $\supset$ por la relación $\subset$), *obtendremos de nuevo una desigualdad válida* (es decir, una desigualdad que se cumple para todos los valores de los elementos

---

[1]) En esta álgebra de Boole para dos elementos cualesquiera $x$ e $y$ del álgebra siempre tiene lugar una de las relaciones $x \supset y$ o $y \supset x$ por lo menos.

del álgebra de Boole que en ella figuran). Por ejemplo, de

$$(A+B)(A+C)(A+I)\supset ABC$$

(véase el ejercicio 8, *b* de la pág. 50) se deduce que siempre

$$AB+AC+AO\subset A+B+C.$$

Para demostrar el principio de dualidad, basta aplicar la operación «raya» a ambos miembros de la desigualdad inicial. Así, de la validez de la desigualdad $(A+B)(A+C)(A+I)\supset ABC$ y de la regla «si $A\supset B$, entonces $\bar A\subset\bar B$», se deduce que también es válida la desigualdad

$$\overline{(A+B)(A+C)(A+I)}\subset\overline{ABC}.$$

Pero, en virtud de las reglas de Morgan y teniendo en cuenta que $\bar I=O$, obtenemos

$$\overline{(A+B)(A+C)(A+I)}=\overline{(A+B)(A+C)}+\overline{A+I}=$$
$$=\overline{A+B}+\overline{A+C}+\overline{A}\overline{I}=\bar A\bar B+\bar A\bar C+\bar A O.$$

Análogamente

$$\overline{ABC}=\bar A+\bar B+\bar C.$$

De esta forma, deducimos que para cualesquiera $A$, $B$ y $C$ tiene lugar la desigualdad

$$\bar A\bar B+\bar A\bar C+\bar A O\subset\bar A+\bar B+\bar C.$$

Pero como aquí $\bar A$, $\bar B$ y $\bar C$ son *arbitrarios*, se pueden designar simplemente por $A$, $B$ y $C$. De esto modo llegamos precisamente a la desigualdad

$$AB+AC+AO\subset A+B+C$$

dual, en el sentido explicado anteriormente, de la inicial.

## EJERCICIOS

**1.** Escribe las igualdades duales de todas las igualdades que se propone demostrar en los ejercicios del 1 al 10 de la pág. 22.

**2.** Demuestra las siguientes identidades del álgebra de los conjuntos:

a) $(A+B)(A+\bar B)=A;$

b) $AB+(A+B)(\bar A+\bar B)=A+B;$

c) $\overline{\bar A\,\bar B C}\;\overline{\bar A B}\;\bar A C=0;$

d)* $A+\bar A B=A+B.$

3. Demuestra que si la operación «raya» figura en una igualdad del álgebra de Boole, también es válida la igualdad que se obtiene de ella sustituyendo toda adición booleana por la multiplicación booleana, y viceversa, todo elemento $O$ (si es que aparece en nuestra igualdad) por el elemento $I$, y viceversa, pero conservando la operación «raya» en su sitio cada vez que aparezca en la igualdad inicial. (Ejemplo: de la identidad del ejercicio 2, c se deduce que

$$\overline{\overline{A}+\overline{B}+C}+\overline{\overline{A}+B}+\overline{A}+C=I$$

cualesquiera que sean los elementos $A$, $B$ y $C$ del álgebra de Boole.)

4. ¿Qué igualdades se obtienen, por medio del principio de dualidad descrito en el ejercicio 3, de las igualdades de los ejercicios 2, a, b y d?

5. Comprueba que en el «álgebra de los cuatro números» (ejemplo 2 de la pág. 26) se cumple la segunda regla de Morgan: $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$.

6*. a) Sea $N=p_1p_2\ldots p_k$, donde todos los números primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son distintos. Demuestra que en este caso el «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores», cuyos elementos son los divisores del número $N$ (véase el ejemplo 4 de la pág. 30), se convierte en el «álgebra de los subconjuntos del conjunto universo $I=\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$»; deduce de aquí que en esta «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores» se cumplen todas las leyes del álgebra de Boole incluyendo también las reglas de Morgan.

b) Sea $N=p^A$, donde $p$ es un número primo y $A$ es un entero positivo. Demuestra que en este caso el «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores», cuyos elementos son los divisores del número $N$, se convierte en el «álgebra de los máximos y los mínimos» definida en el conjunto de los números $0, 1, 2, \ldots, A$. Deduce de aquí que para esta «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores» se cumplen todas las leyes del álgebra de Boole incluyendo también las reglas de Morgan.

c) Sea $N=p_1^{A_1}p_2^{A_2}\ldots p_k^{A_k}$ y $m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$, donde $0\leqslant a_1\leqslant A_1$, $0\leqslant a_2\leqslant A_2, \ldots, 0\leqslant a_k\leqslant A_k$ (véase el ejercicio 6 de la pág. 35). ¿Qué forma tendrá la descomposición en factores primos del número $\overline{m}=\frac{N}{m}$? Emplea la fórmula obtenida para demostrar las reglas de Morgan en el caso general del «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores».

7* Entre las álgebras de Boole que conoces, ¿en cuáles se cumplen y en cuáles no se cumplen las igualdades

$$A+\overline{A}=I \quad \text{y} \quad A\,\overline{A}=0?$$

8. Demuestra las siguientes desigualdades del álgebra de los conjuntos:

a) $A+B+C\supset(A+B)(A+C)$;

b) $(A+B)(A+C)(A+I)\supset ABC$;

c) $(A+B)(B+C)(C+A)\supset ABC$;

d) $A+B\supset\overline{A}B+A\overline{B}$.

9. Escribe las desigualdades que se obtienen de las desigualdades a, b y c del ejercicio 8 aplicando el principio de dualidad; demuéstralas directamente, sin recurrir al principio de dualidad.

10. Demuestra que si una desigualdad booleana comprende la operación «raya», también es válida la desigualdad que se obtiene de la inicial sustituyendo la adición booleana por la multiplicación booleana, y viceversa, el elemento $O$ por el elemento $I$, y viceversa, conservando la operación «raya» en su sitio cada vez que aparezca en la desigualdad inicial y sustituyendo el signo de la desigualdad por el signo opuesto. Aplica este principio para obtener una desigualdad nueva a partir de la desigualdad d del ejercicio 8.

11. Comprueba todas las propiedades de la relación $\supset$ para
a) el «álgebra de los máximos y los mínimos»;
b) el «álgebra de los mínimos múltiples y los máximos divisores».

12*. Sean $A$ y $B$ unos conjuntos tales que $A \supset B$. Simplifica las expresiones

a) $A+B$; b) $AB$; c) $A+\bar{B}$; d) $\bar{A}B$.

## § 4.

## CONJUNTOS Y PROPOSICIONES; ÁLGEBRA DE LAS PROPOSICIONES

Volvamos de nuevo al álgebra booleana de los conjuntos, principal en nuestro folleto. Preguntémonos cómo pueden definirse los conjuntos que representan elementos de esta álgebra. Por supuesto, el modo más sencillo para definir un conjunto es el llamado modo *explícito* o *enumerativo* cuando se indican simplemente todos los elementos del conjunto considerado; así, puede hablarse del «conjunto de los escolares: Alejandro, Simeón, Miguel, Catalina», del «conjunto de los números: 1, 2, 3, 4, 5» o del «conjunto de las cuatro operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división». Al indicar todos los elementos de un conjunto, en las Matemáticas se acostumbra incluirlos entre llaves; así, puede escribirse

$$A = \{\text{Alejandro, Simeón, Miguel, Catalina}\},$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ o } C = \{+, -, \times, :\}$$

(en en último caso, los signos de las operaciones representan las operaciones mismas)[1]).

Sin embargo, este modo de definir un conjunto resulta muy incómodo si el conjunto tiene muchos elementos y no puede servir en absoluto para definir conjuntos **infinitos** (ya que no podemos enumerar una cantidad infinita de elementos de un conjunto). Además, incluso en los casos en los que es factible y sencilla la definición explícita de un conjunto, ella difumina a veces la esencia misma del conjunto considerado, las razones que nos conducen a unir en un conjunto precisamente estos elementos y no otros.

Está mucho más difundido otro modo de definición de los conjuntos, llamado *implícito* o *descriptivo*, cuando señalamos una **propiedad** que caracteriza todos los elementos del conjunto considerado: así, puede hablarse del «conjunto de todos los alumnos de tu clase que estudian en sobresaliente» (es posible que sea precisamente el conjunto $A$ que figura más arriba), del «conjunto de todos los números enteros $x$ tales que $0 < x \leqslant 5$» (éste es precisamente el conjunto $B$) o del «conjunto de todos los animales del parque zoológico de Moscú». El modo descriptivo de definición de un conjunto es totalmente aplicable a los conjuntos infinitos como el «conjunto de todos los números enteros» o el «conjunto de todos los triángulos de área 1»; es más, según hemos señalado anteriormente, los conjuntos infinitos pueden definirse **sólo** aplicando el modo descriptivo.

El modo implícito (descriptivo) de definición de los conjuntos vincula éstos con las *proposiciones* que se estudian en la Lógica Matemática. A saber, este modo de definición de un conjunto consiste en que fijamos un conjunto de objetos, que son los únicos que nos interesan (por ejemplo, el conjunto de los alumnos de tu clase o el conjunto de los números enteros) y enunciamos después una proposición que cumplen todos los elementos del conjunto considerado, y sólo estos elementos; si nos interesan sólo los conjuntos de alumnos de tu clase, estas proposiciones pueden ser: «estudia en sobresaliente», «es ajedrecista», «está sentado en la primera fila», «se llama Andrés», etc. El conjunto $A$ de todos los elementos del conjunto universo $I$ (conjunto de los alumnos, conjunto de los números, etc.) que cumplen la propiedad

[1]) Véase también el ejercicio 6a de la pág. 50.

que es el contenido de la proposición dada *a* se denomina *conjunto de verdad* de la proposición dada (véase por ejemplo la fig. 24)[1]).

De esta forma, hemos establecido una «conexión bilateral» entre los conjuntos y las proposiciones: cada conjunto se

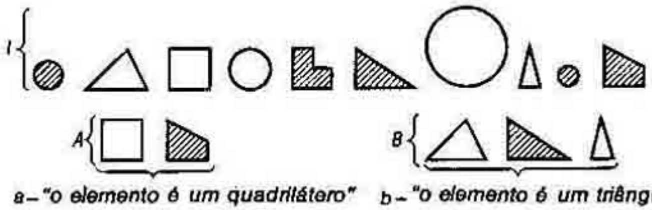



FIG. 24

describe por una proposición (esta proposición puede consistir incluso en la simple enumeración de los elementos del conjunto: «es Alejandro, Simeón, Miguel o Catalina») y a cada proposición le corresponde un determinado conjunto de verdad de esta proposición. Además, para cualquier conjunto de proposiciones —incluso de proposiciones referentes a objetos heterogéneos— se puede indicar siempre el conjunto universo *I* que les corresponde y que comprende *todos* los objetos de los que tratan las proposiciones consideradas. Sin embargo —y esto es de suma importancia— *entenderemos por proposición sólo una afirmación de la cual podemos decir si es verdadera o falsa* (respecto a un elemento determinado del conjunto universo considerado). De esta forma, son proposiciones las frases «tiene dos cabezas y dieciseis brazos» o «$2 \times 3 = 6$» (la segunda de estas frases no depende siquiera de cómo se escoja el conjunto universo *I*), mientras que la consigna «¡Viva el Primero de Mayo!» o la interjección «¡Ah!» no representan, por supuesto, proposiciones.

Por cuanto las proposiciones nos interesan únicamente desde el punto de vista de los conjuntos que describen, no

[1]) Las proposiciones serán siempre designadas por letras minúsculas del alfabeto latino mientras que los conjuntos de verdad que les corresponden serán designados preferentemente por *las mismas* letras mayúsculas del alfabeto latino.

haremos diferencia y consideraremos idénticas dos proposiciones $a$ y $b$ a las que corresponde un mismo conjunto de verdad. Si dos proposiciones $a$ y $b$ (por ejemplo, «estudia en sobresaliente» y «tiene sólo notas sobresalientes» o «el número $x$ es impar» y «el número $x$ dividido por 2 da 1 como resto») son iguales, escribiremos

$$a = b.$$

Habrá que considerar iguales entonces todas las proposiciones *idénticamente verdaderas* (o *carentes de contenido*), o sea, las proposiciones que son verdaderas **siempre**, independientemente del elemento del conjunto $I$ que se considere; así, son idénticamente verdaderas las proposiciones «$2 \times 3 = 6$», «el alumno de tu clase es un varón o una hembra», «la estatura del alumno no pasa de 3 metros», etc. Designaremos todas las proposiciones identicamente verdaderas por la letra $\iota$. También consideraremos iguales todas las proposiciones *idénticamente falsas* (o *contradictorias*) que no tienen **nunca** lugar, o sea, las proposiciones cuyo conjunto de verdad es vacío. Como ejemplos de tales proposiciones, que designaremos por la letra $o$, pueden servir las siguientes: «$2 \times 2 = 6$», «el alumno de tu clase sabe volar», «su estatura pasa de los 4 metros», «el número es mayor que 3 y menor que 2».

La relación existente entre los conjuntos y las proposiciones permite definir para las proposiciones unas **operaciones algebraicas** específicas similares a las introducidas anteriormente para el álgebra de los conjuntos. A saber, denominaremos **suma** *de dos proposiciones a y b la proposición cuyo conjunto de verdad coincide con la suma del conjunto de verdad A de la proposición a y del conjunto de verdad B de la proposición b*; designaremos esta proposición por el símbolo $a + b$[1]). Pero sabido es que la suma de dos conjuntos es sencillamente la **unión** de todos los elementos pertenecientes a ambos conjuntos; por eso, la suma de las proposiciones $a$ y $b$ es la proposición «$a$ o $b$», donde la conjunción «o» significa que es verdadera la proposición $a$ o la proposición $b$ o bien ambas a la vez. Por ejemplo, si la proposición $a$ reza «es aficionado al ajedrez» y en tu clase a esta proposición le corresponde el

[1]) En la Lógica Matemática la suma de dos proposiciones $a$ y $b$ suele denominarse *disyunción* de las mismas y representarse por el símbolo $a \vee b$ (compara con la designación $A \cup B$ de la suma de los conjuntos $A$ y $B$).

conjunto de verdad

$A = \{$Alejandro, Simeón, Miguel, Andrés, Catalina, Alejandra, Elena$\}$

mientras que la proposición $b$ reza «es aficionado al juego de las damas» y tiene el conjunto de verdad

$B = \{$Alejandro, Miguel, Pedro, Igor, Catalina, Luz$\}$, entonces $a + b$ es la proposición «es aficionado al ajedrez *o* al juego de las damas» y a esta proposición le corresponde el conjunto de verdad

$A + B = \{$Alejandro, Simeón, Miguel, Andrés, Pedro, Igor, Catalina, Alejandra, Elena, Luz$\}$.

Si el conjunto universo es el conjunto de las figuras representadas en la fig. 24 y las proposiciones $c$ y $d$ significan

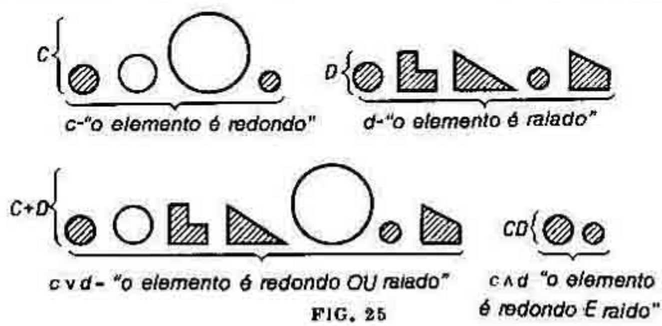



FIG. 25

«la figura es redonda» y «la figura está sombreada», entonces la proposición $c + d$ reza «la figura es redonda *o* está sombreada» (fig. 25).

De un modo análogo, denominaremos **producto** *ab de las proposiciones a y b con los conjuntos de verdad A y B a la proposición cuyo conjunto de verdad coincide con el producto AB de los conjuntos A y B*[1]). Pero el producto de dos conjuntos $A$

[1]) En la Lógica Matemática el producto de las proposiciones $a$ y $b$ se denomina con frecuencia *conjunción* de las mismas y se designa por el símbolo $a \wedge b$ (compara con la designación $A \cap B$ del producto de los conjuntos $A$ y $B$).

y $B$ es la **intersección**, o la **parte común** de los mismos, que contiene los elementos que pertenecen a ambos conjuntos $A$ y $B$, y sólo estos elementos; por eso, el producto $ab$ de las proposiciones $a$ y $b$ es la proposición «$a$ y $b$», donde la conjunción «y» significa, como siempre, que son verdaderas **ambas** proposiciones: la proposición $a$ y la proposición $b$. Por ejemplo, si las proposiciones $a$ y $b$ referentes a los alumnos de tu clase tienen el mismo significado que antes, entonces la proposición $ab$ reza «es aficionado al ajedrez y es aficionado al juego de las damas» y a esta proposición le corresponde el conjunto de verdad

$$AB = \{\text{Alejandro, Miguel, Catalina}\}.$$

Si las proposiciones $c$ y $d$, referentes al conjunto de figuras representadas en la fig. 24, significan «la figura es redonda» y «la figura está sombreada», entonces la proposición $cd$ significa «la figura es redonda y está sombreada» (fig. 25).

La relación existente entre los conjuntos y las proposiciones permite traspasar a las proposiciones todas las reglas del álgebra de los conjuntos:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba;$$

**leyes conmutativas del álgebra de las proposiciones**

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (ab)\,c = a\,(bc);$$

**leyes asociativas del álgebra de las proposiciones**

$$(a + b)\,c = ac + bc, \qquad ab + c = (a + c)\,(b + c);$$

**leyes distributivas del álgebra de las proposiciones**

$$a + a = a, \quad aa = a.$$

**leyes idempotentes del álgebra de las proposiciones**

Además, si $i$ es una proposición idénticamente verdadera y $o$ es una proposición idénticamente falsa, entonces siempre (o sea, para **cualquier** proposición $a$)

$$a + o = a, \quad ai = a;$$
$$a + i = i, \quad ao = o.$$

Por ejemplo, la proposición «estudia en sobresaliente o tiene dos cabezas» es equivalente a la proposición «estudia en sobresaliente», mientras que la proposición «es aficionado a la

natación y tiene menos de 200 años» es equivalente a la proposición «es aficionado a la natación»[1]).

Para comprender cómo las leyes del álgebra de las proposiciones se deducen de las leyes del álgebra de los conjuntos, consideremos, por ejemplo, la *segunda ley distributiva*. Puesto que el conjunto de verdad de la suma de dos proposiciones representa la suma de los conjuntos de verdad de estas proposiciones y el conjunto de verdad del producto de proposiciones es el producto de sus conjuntos de verdad, resulta que el conjunto de verdad de la proposición compleja $ab + c$ (o sea, de la proposición «tiene lugar «*a y b*» *o c*») es $AB + C$, donde $A$, $B$ y $C$ son los conjuntos de verdad de las respectivas proposiciones $a$, $b$ y $c$. Análogamente, el conjunto de verdad de la proposición compleja $(a + c)(b + c)$ es el conjunto $(A + C)(B + C)$. Pero, en virtud de la segunda ley distributiva del álgebra de los conjuntos,

$$AB + C = (A + C)(B + C).$$

Por consiguiente, los conjuntos de verdad de las proposiciones $ab + c$ y $(a + c)(b + c)$ coinciden; pero esto significa precisamente que las proposiciones $ab + c$ y $(a + c)(b + c)$ son iguales. (Véase también la pág. 18 donde hemos señalado que las proposiciones «es aficionado al ajedrez y al juego de las damas o a la natación» y «es aficionado al ajedrez o a la natación y también es aficionado al juego de las damas o a la natación» tienen el mismo sentido, o sea,

$$ab + c = (a + c)(b + c),$$

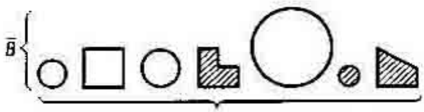
donde las proposiciones $a$, $b$ y $c$ significan, respectivamente, «es aficionado al ajedrez», «es aficionado al juego de las damas» y «es aficionado a la natación».)

Aparte de las operaciones de adición y de multiplicación de los conjuntos, también se puede traspasar al álgebra de las proposiciones la operación «raya». En este caso debe entenderse por $\bar{a}$ *la proposición cuyo conjunto de verdad es el conjunto* $\bar{A}$, *donde* $A$ *es el conjunto de verdad de la proposición* $a$. En otras palabras, deben cumplir la condición $\bar{a}$ aquellos elementos del conjunto universo $I$ que **no figuran** en el conjunto $A$,

[1]) Representemos también las leyes enumeradas más arriba en la forma que suelen aparecer en los textos de Lógica Matemática:

$$a \vee b = b \vee a, \qquad a \wedge b = b \wedge a;$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \qquad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$
$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c), \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c);$$
$$a \vee a = a, \qquad a \wedge a = a;$$
$$a \vee o = a, \qquad a \wedge i = a;$$
$$a \vee i = i, \qquad a \wedge o = o.$$

o sea, los elementos que **no cumplen** la condición $a$, y sólo estos elementos. Por ejemplo, si la proposición $\bar{a}$ reza «tiene notas insatisfactorias», entonces la proposición $\bar{\bar{a}}$ significa «no tiene notas insatisfactorias» («tiene buenas notas en todas las asignaturas»); si el conjunto universo $I$ consta de las




$\bar{b}$- "o elemento NÃO é um triângulo"

figuras representadas en la fig. 24 y la proposición $b$ reza «la figura es triangular», entonces la proposición $\bar{b}$ significa «la figura no es triangular» (fig. 26). En general, la proposición $\bar{a}$ tiene el sentido de «**no** $a$»; por eso en el álgebra de las proposiciones la operación «raya» se denomina formación de la negación o simplemente *negación*.

Enumeremos ahora las leyes del álgebra de las proposiciones relacionadas con la operación de la negación:

$$\bar{\bar{a}} = a;$$

$$a + \bar{a} = i \quad \text{y} \quad a\bar{a} = 0;$$

$$\bar{o} = i \quad \text{y} \quad \bar{i} = o;$$

$$\overline{a+b} = \bar{a}\,\bar{b} \quad \text{y} \quad \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}.$$

En efecto la negación de una proposición idénticamente falsa (por ejemplo, «2 × 2 *no* es igual a 5» o «este alumno *no* tiene dos cabezas») siempre será una proposición idénticamente verdadera, mientras que la negación de una proposición idénticamente verdadera («este alumno *no* tiene menos de 120 años») siempre será idénticamente falsa. También es fácil comprobar las demás leyes (¡hazlo!); es verdad, que éstas no requieren una comprobación especial ya que se

deducen de las leyes correspondientes del álgebra de los conjuntos[1]).

## EJERCICIOS

**1.** Cita tres ejemplos de proposiciones idénticamente verdaderas y dos ejemplos de proposiciones idénticamente falsas.

**2.** Supongamos que la proposición $a$ significa:

a) «$2 \times 2 = 4$»;
b) «es varón»;
c) «el elefante es un insecto»;
d) «sabe volar».

¿Qué significado tiene en todos estos casos la proposición $\bar{a}$? ¿Es idénticamente verdadera? ¿Es idénticamente falsa?

**3.** Supongamos que la proposición $a$ significa «es aficionado al ajedrez», mientras que la proposición $b$ significa «es aficionado al juego de las damas». ¿Qué significado tienen las proposiciones:

a) $a+b$; b) $ab$; c) $\bar{a}+b$; d) $a+\bar{b}$; e) $\bar{a}+\bar{b}$;

f) $\bar{a}b$; g) $\overline{ab}$; h) $\bar{a}\,\bar{b}$?

**4.** Supongamos que la proposición $a$ significa «el alumno estudia en sobresaliente», la proposición $b$ reza «el alumno es moreno» y la proposición $c$ afirma «el alumno es aficionado a la natación». ¿Qué significado tienen las proposiciones:

a) $(a+b)\,c$ y $ac+bc$;

b) $ab+c$ y $(a+c)\,(b+c)$?

**5.** Supongamos que las proposiciones $a$ y $b$ significan: «el número entero positivo es par» y «el número entero positivo es primo». ¿Qué significado tienen las proposiciones:

a) $ab$; b) $\bar{a}+b$; c) $\bar{a}b$; d) $a\bar{b}$; e) $\bar{a}+\bar{b}$?

¿Qué representan los conjuntos de verdad de estas proposiciones?

**6.** Supongamos que las proposiciones $a$ y $b$ significan, respectivamente, «el alumno es miembro del círculo matemático» y «el alumno participa en el coro». ¿Qué significado tienen las proposiciones

a) $\overline{a+b}$ y $\bar{a}\,\bar{b}$;

b) $\overline{ab}$ y $\bar{a}+\bar{b}$?

---

[1]) Por ejemplo, puesto que los conjuntos de verdad de las proposiciones $\overline{a+b}$ y $\bar{a}\,\bar{b}$ son iguales a $\overline{A+B}$ y $\bar{A}\,\bar{B}$, respectivamente, donde $A$ y $B$ son los conjuntos de verdad de las proposiciones $a$ y $b$, y puesto que $\overline{A+B} = \bar{A}\,\bar{B}$, entonces de la definición de la igualdad (coincidencia) de proposiciones resulta que $\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}$.

## § 5.
## «LEYES DEL PENSAMIENTO» Y REGLAS DE LA DEDUCCION

Ahora podemos responder a la pregunta de por qué George Boole dio el título de «Investigación de las leyes del pensamiento» a su obra en la que fue construida el «álgebra extraordinaria» considerada en el folleto presente. En efecto, el **álgebra de las proposiciones** tiene una relación directa con las leyes por las cuales se rige el hombre en el proceso de pensamiento, ya que la suma y el producto de proposiciones, definidos anteriormente, no significan otra cosa sino las cópulas lógicas «o» e «y», la operación «raya» tiene el sentido de la negación, mientras que las leyes del álgebra de las proposiciones describen las propiedades principales de estas **operaciones lógicas** por las cuales se rigen todas las personas. Claro está que muy pocas personas interpretan estas propiedades en tanto que leyes matemáticas del pensamiento, pero incluso los niños pequeños las emplean con soltura. En efecto, nadie duda, por supuesto, de que decir «corre rápido y salta alto» es lo mismo que decir «salta alto y corre rápido»; en otras palabras, todos saben (aunque no todos son conscientes de ello» que las proposiciones *ab* y *ba* tienen el mismo sentido, son «iguales».

Ahora podemos explicar las razones que han motivado en nuestros días tan acrecentado interés hacia los estudios de George Boole, hacia la interpretación matemática de las leyes de la lógica en forma de específicas «reglas del álgebra». Mientras el campo del pensamiento ha constituido una prerrogativa absoluta del raciocinio humano, podíamos desentendernos de la descripción formalizada de las «leyes del pensamiento»: pues las personas siempre se han regido por estas leyes sin darse cuenta siquiera del contenido de las mismas. Pero en los últimos decenios la situación ha cambiado vertiginosamente y hoy tratamos de encomendar a nuestros «colaboradores electrónicos», las máquinas computadora electrónicas, funciones que antes cumplían sólo seres conss

cientes: dirección de la producción y elaboración de horarios del transporte, solución de problemas matemáticos y traducción de libros, planificación de la economía y búsqueda de datos que nos interesan en la vasta bibliografía científica; hoy día las máquinas electrónicas juegan incluso al ajedrez. Pero, para «enseñar» todo esto a las máquinas, nos hemos visto obligados, naturalmente, a enunciar con claridad las «reglas del juego», las «leyes del pensamiento», que deben seguir las «inteligentes» máquinas creadas por el hombre: mientras el hombre sigue **instintivamente** las reglas de la lógica, para la máquina es preciso formularlas con claridad y, además, formularlas en el único «idioma» que sólo puede «comprender» la máquina matemática, en el idioma de las matemáticas [1]).

Pero volvamos a las «leyes del pensamiento». Las de mayor interés son las relacionadas con la operación lógica de la negación; muchas de éstas tienen nombre especial en la Lógica. Por ejemplo, la regla

$$a+\bar{a}=i$$

expresa la llamada *ley del tercer excluido*: tiene lugar la proposición $a$ o tiene lugar la proposición $\bar{a}$, sin que pueda darse un tercer caso, y por eso es siempre verdadera la proposición $a+\bar{a}$, o sea, «$a$ o no $a$». Así, aun sin saber nada sobre el «alumno de mayor estatura de la séptima clase de la escuela N° 12 de Leningrado», podemos afirmar que este alumno «estudia en sobresaliente o no estudia en sobresaliente», que «es aficionado al ajedrez o que no es aficionado al ajedrez». La regla

$$a\bar{a}=o$$

lleva el nombre de *ley de la contradicción*; esta ley establece que las proposiciones $a$ y $\bar{a}$, o sea, $a$ y «no $a$», jamás pueden tener lugar simultáneamente, es decir, que el producto de estas proposiciones es siempre falso. Por ejemplo, si un alumno estudia en sobresaliente, la proposición «no estudia en

[1]) Empero, no quisiéramos que el lector sacara de aquí la conclusión de que el álgebra elemental de las proposiciones, a la que está exclusivamente consagrado este folleto, representa ya el aparato que permite construir máquinas computadoras complejas o plantear los problemas en forma tal que la solución de los mismos pueda ser ya «confiada» a las máquinas electrónicas.

sobresaliente» aplicada a este alumno será, por supuesto, falsa; si el número (entero) $n$ es par, para él resulta falsa la proposición «es impar». La regla

$$\overline{\overline{a}}=a$$

se denomina *ley de la negación doble*; establece que la negación doble de una proposición equivale a la proposición inicial. Así, la negación de la proposición «es par», referente a un número entero, es la proposición «es impar»; la negación «es no impar» de esta última proposición nos hace retornar a la proposición inicial sobre la paridad del número. De un modo análogo, la negación doble «no es un alumno que no tiene buenas notas» de la proposición acerca de que el alumno tiene buenas notas equivale a la proposición inicial «tiene buenas notas».

No es menor la importancia que tienen las reglas de Morgan

$$\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b} \quad \text{y} \quad \overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$$

para las proposiciones aunque el enunciado verbal de las mismas es algo más complejo (véase a este propósito el ejercicio 1 que viene a continuación). De la misma forma todas las demás reglas del álgebra de las proposiciones, como son las leyes distributivas

$$(a+b)\,c=ac+bc \quad \text{y} \quad ab+c=(a+c)\,(b+c)$$

o las leyes idempotentes

$$a+a=a \quad \text{y} \quad aa=a,$$

representan determinadas «leyes del pensamiento», determinadas reglas de la lógica que rigen la obtención de nuevas conclusiones de otras que ya se conocen.

Un lugar peculiar ocupan las reglas referentes a la relación lógica $\supset$. Hasta el momento no hemos considerado esta relación; sin embargo la «conexión bilateral» entre los conjuntos y las proposiciones, que hemos establecido anteriormente, permite traspasar sin dificultad la relación $\supset$ del álgebra de los conjuntos (relación de inclusión) al campo del álgebra de las proposiciones. A saber, escribiremos

$$a\supset b$$

y diremos que *la proposición a* **se deduce** *de la proposición b* (o que *a es* **un corolario** *de b*) siempre que *el conjunto de verdad A de la proposición a comprenda el conjunto de verdad B de la proposición b*, o sea, siempre que

$$A \supset B.$$

Por ejemplo, puesto que el conjunto $B$ de los alumnos de tu clase que estudian en sobresaliente está contenido obviamente en el conjunto $A$ de todos los alumnos que tienen buenas notas, resulta que la proposición $a$: «el alumno de tu clase tiene buenas notas en todas las asignaturas» es corolario de la proposición $b$: «el alumno estudia en sobresaliente». De un modo análogo, el conjunto

$$A_6 = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

de los números (enteros positivos) divisibles por 6 está contenido en el conjunto

$$A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \ldots\}$$

de los números pares; por esto, la proposición «el número es par» resulta corolario de la proposición «el número es divisible por 6»[1]).

A menudo se denomina *deducción* a la comprobación de que dos proposiciones $a$ y $b$ están vinculadas por la relación $a \supset b$; en este caso la proposición $b$ se denomina *hipótesis* y la proposición $a$, que se deduce de esta hipótesis, se denomina *tesis*. Con las deducciones nos encontramos muy frecuentemente en la ciencia y en la vida cotidiana; por ejemplo, tienen como regla carácter de deducción las demostraciones de teoremas matemáticos: se exige demostrar que la hipótesis $b$ del teorema (por ejemplo, «el ángulo $P$ del triángulo $MNP$ es recto», fig. 27) implica la tesis $a$ («$MP^2 + NP^2 = MN^2$»; en este caso la fórmula $a \supset b$ equivale al teorema de Pitágoras). En las deducciones (por ejemplo, al demostrar los teoremas) empleamos sistemáticamente (sin darnos cuenta a veces

[1]) Si $a \supset b$, también se dice que la proposición $b$ es condición suficiente para $a$ (para que el alumno tenga buenas notas en todas las asignaturas es *suficiente*, por supuesto, que estudie en sobresaliente) y que la proposición $a$ es condición necesaria para $b$ (para que el alumno estudie en sobresaliente es *necesario*, por supuesto, que enga buenas notas en todas las asignaturas).

de ello) las propiedades principales de la relación $\supset$[1]):

$$a \supset a;$$

$$\text{si } a \supset b \text{ y } b \supset a, \text{ entonces } a = b;$$

$$\text{si } a \supset b \text{ y } b \supset c, \text{ entonces } a \supset c;$$

$$i \supset a \text{ y } a \supset o \text{ cualquiera que sea } a;$$

$$a + b \supset a \text{ y } a \supset ab \text{ para cualesquiera } a \text{ y } b;$$

$$\text{si } a \supset b, \text{ entonces } \overline{b} \supset \overline{a}.$$

Por ejemplo, sabemos que *si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en el punto medio de ambas* (proposición $b$),

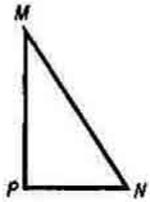



FIG. 27

*dicho cuadrilátero es un paralelogramo* (proposición $a$)[2]); por otro lado, en el paralelogramo *los ángulos opuestos son iguales* (proposición $c$). De este modo, tenemos

$$a \supset b \quad \text{y} \quad c \supset a;$$

por eso

$$c \supset b$$

o en otras palabras: *si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en el punto medio de ambas, sus ángulos opuestos son iguales.*

Detengámonos finalmente en el empleo de la regla «*si $a \supset b$, entonces $\overline{b} \supset \overline{a}$*». Esta regla es la base de las así llama-

[1]) La regla «*si $a \supset b$ y $b \supset a$, entonces $a = b$*» se enuncia a veces así: si $b$ es condición necesaria y suficiente para $a$, las proposiciones $a$ y $b$ son equivalentes (desde nuestro punto de vista, iguales o idénticas).

[2]) En este caso tenemos incluso $a \supset b$ y $b \supset a$, o sea, $a = b$.

las demostraciones **por el absurdo**. Supongamos que debemos demostrar que tiene lugar la relación $a \supset b$: de la proposición $b$ se deduce la proposición $a$. Frecuentemente resulta más fácil demostrar que si $a$ **no tiene lugar**, tampoco puede cumplirse $b$, o sea, que de la proposición «no $a$» (proposición $\bar{a}$) se deduce la proposición «no $b$» (proposición $\bar{b}$).

He aquí un ejemplo de este modo de razonar: demostremos que *si el número (entero) n mayor que 3 es primo* (proposición $b$), *entonces n es de la forma 6k ± 1 (donde k es un entero)*, o sea, que al dividir $n$ por 6 se obtiene el resto $+1$ o el resto $-1$ (proposición $a$). Es bastante difícil demostrarlo directamente, sin basarse en la regla «si $a \supset b$, entonces $\bar{b} \supset \bar{a}$»; tratemos, por eso, de recurrir a la demostración por el absurdo. Supongamos que tiene lugar la proposición $\bar{a}$, o sea, que el número $n$ (entero y mayor que 3) **no es de la forma** $6k \pm 1$. Al dividir por 6 cualquier número entero $n$ se obtiene o bien el resto 0 (en este caso el número $n$ es divisible por 6), o bien el resto 1, o bien el resto 2, o bien el resto 3, o bien el resto 4, o bien el resto 5 (o el resto $-1$ que viene a ser lo mismo); por eso, la hipótesis $\bar{a}$ significa que *al dividir el número n por 6 se obtiene o bien el resto* 0 (o sea, el número es divisible por 6), *o bien el resto 2, o bien el resto 3, o bien el resto 4*. Pero un número divisible por 6 jamás puede ser primo; si al dividir un número entero $n > 3$ por 6 se obtiene 2 ó 4 como resto, el número es par y, por consiguiente, no puede ser primo; si al dividir $n$ por 6 se obtiene 3 como resto, el número es divisible por 3 y tampoco puede ser primo. Es decir, de $\bar{a}$ se deduce $\bar{b}$ (simbólicamente $\bar{b} \supset \bar{a}$); de aquí se desprende precisamente que

$$a \supset b$$

que es lo que queríamos demostrar[1]).

EJERCICIOS

**1.** Enuncia verbalmente las reglas de Morgan $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b}$ y $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$ del álgebra de las proposiciones.

[1]) Más preciso es el razonamiento siguiente: de la relación demostrada $\bar{b} \supset \bar{a}$ se deduce que $\overline{(\bar{a})} \supset \overline{(\bar{b})}$ o $\bar{\bar{a}} \supset \bar{\bar{b}}$; pero, como en virtud de la ley de la negación doble $\bar{\bar{a}} = a$ y $\bar{\bar{b}} = b$, tenemos $a \supset b$.

2. Cita un ejemplo que ilustre
a) la ley del tercero excluido;
b) la ley de la contradicción;
c) la ley de la negación doble.

3. Propón un ejemplo para ilustrar cada una de las propiedades de la relación $\supset$ (relación de secuencia) de las proposiciones enumeradas en la pág. 64.

4. Recuerda algún ejemplo que tu conozcas de la demostración por el absurdo y escríbelo en forma simbólica.

5. Sea $a \supset b$. Simplifica la suma $a + b$ de las proposiciones $a$ y $b$ y el producto $ab$ de estas proposiciones.

## § 6. PROPOSIONES Y CIRCUITOS DE CONTACTOS

Para terminar este folleto indicaremos un ejemplo más de un álgebra de Boole que posiblemente te parezca bastante inesperado. Consideraremos como elementos de nuestra álgebra todos los **circuitos**

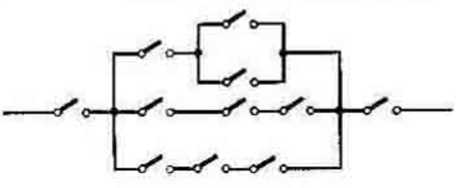
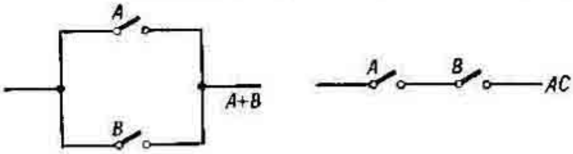


FIG. 28

**de contactos** posibles, es decir, los circuitos eléctricos provistos de una serie de interruptores de contacto. Las secciones aisladas de tal circuito, semejante al representado en la fig. 28, las designaremos con letra latina mayúscula; éstas serán precisamente los elementos del álgebra específica considerada.

Por cuanto la única misión de una sección de un circuito eléctrico consiste en conducir la corriente eléctrica, no haremos diferencia y consideraremos «iguales» dos secciones idénticas en este aspecto, o sea, dos secciones que contienen los mismos interruptores y que simultáneamente conducen o no conducen la corriente cuando la posición («cerrado», «abierto») de todos los interruptores es la misma. Además, denominaremos suma $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ de dos secciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

de un circuito el resultado de su *acoplamiento en paralelo* y **producto** $\mathcal{A}\mathcal{B}$, el resultado de su *acomplamiento en serie* (véase la fig. 29, *a* y *b*, donde las secciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ contienen un contacto cada una). Está




a) b)

FIG. 29

claro que la adición y la multiplicación de secciones de un circuito eléctrico definidas de esta forma resultan **conmutativas**

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

y **asociativas**

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}) \qquad (= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}),$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\,\mathcal{C} = \mathcal{A}\,(\mathcal{B}\mathcal{C}) \qquad (= \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C})$$

(véase la fig. 30, *a* y *b*, en la cual está representada la «suma triple» $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ y el producto triple $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ de tres contactos). También verifican las leyes **idempotentes**::

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A},$$

ya que la conexión en serie o en paralelo de dos contactos idénticos (o sea, simultáneamente cerrados o abiertos ambos) da el mismo resultado que un contacto único. Más difícil es comprobar que en nuestra «Algebra de los circuitos de contactos» se cumplen ambas leyes **distributivas**:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\,\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{C} = (\mathcal{A} + \mathcal{C})\,(\mathcal{B} + \mathcal{C});$$

sin embargo, también tienen lugar estas leyes como puede verse de las figs. 31 y 32 (es fácil comprobar que el circuito representado en la fig. 31, *a* es «igual», en nuestro sentido, al circuito de la fig. 31, *b* y que el circuito de la fig. 32, *a* es «igual» al circuito de la fig. 32, *b*).

Convengamos, finalmente, en designar por $\mathcal{J}$ el contacto siempre cerrado (soldado; fig. 33, *a*) y por $\mathcal{O}$ el contacto siempre abierto (ruptura del circuito; fig. 33, *b*). Es evidente entonces que

$$\mathcal{A} + \mathcal{O} = \mathcal{A} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}\mathcal{J} = \mathcal{A}$$

(fig. 34) y que

$$\mathcal{A} + \mathcal{J} = \mathcal{J} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

(fig. 35); de esta forma los contactos $\mathcal{J}$ y $\mathcal{O}$ desempeñan en nuestra álgebra de Boole el papel de los elementos «especiales» $I$ y $O$.

Convengamos, además, en indicar por $\mathcal{A}$ y $\overline{\mathcal{A}}$ un par de contactos tal que *si el contacto* $\mathcal{A}$ *está cerrado, entonces el contacto* $\overline{\mathcal{A}}$ *está nece*

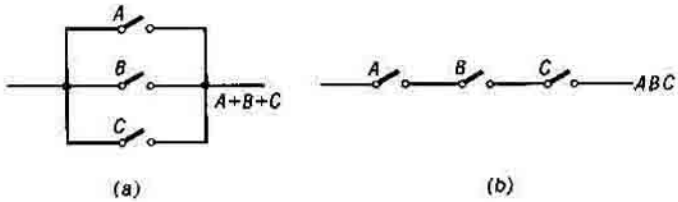



FIG. 30

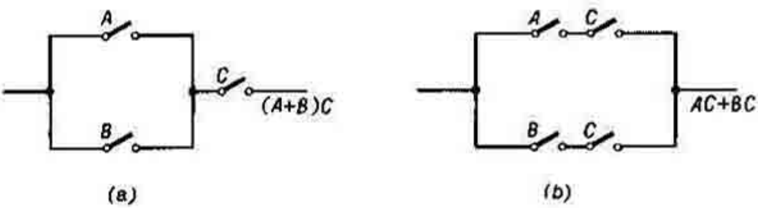



FIG. 31

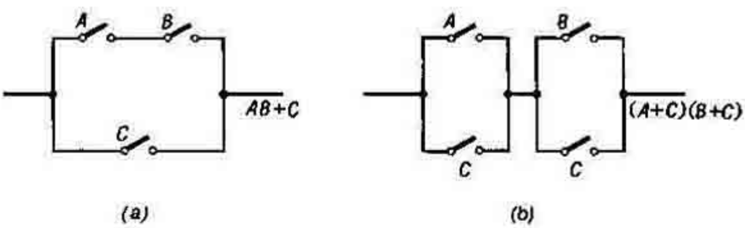



FIG. 32

*sariamente abierto*; es fácil desde el punto de vista técnico realizar semejante par de contactos (fig. 36). Es evidente que

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}}=\mathcal{A}, \quad \overline{\mathcal{I}}=\mathcal{O}, \quad \overline{\mathcal{O}}=\mathcal{I},$$

así como que

$$\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{I} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}=\mathcal{O}$$

(fig. 37, *a* y *b*). Más complejo es demostrar las reglas de Morgan:

$$\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}=\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}=\bar{\mathcal{A}}+\bar{\mathcal{B}},$$

pero también ellas tienen lugar aquí (véase la fig. 38, *a* y *b*, donde as secciones de circuito $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ y $\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ se determinan, digamos,




FIG. 33

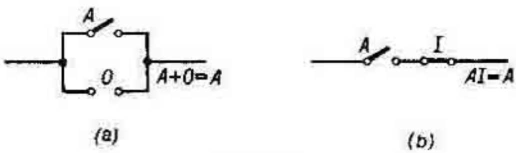



FIG. 34




FIG. 35

por la condición de que si e circuito $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ conduce la corriente, entonces el circuito $\overline{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ no la conduce, y viceversa).

La semejanza que existe entre el «álgebra de los circuitos de contactos» y el «álgebra de las proposiciones» es muy valiosa en dos aspectos. En primer lugar, permite simular proposiciones complejas mediante circuitos eléctricos. Consideremos, por ejemplo, la proposición compleja

$$d=a\bar{b}c+ab\bar{c}.$$

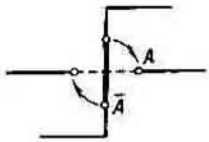



FIG. 36

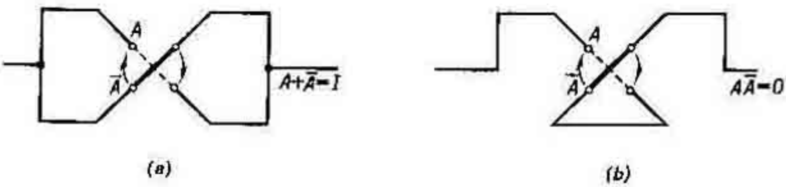



FIG. 37

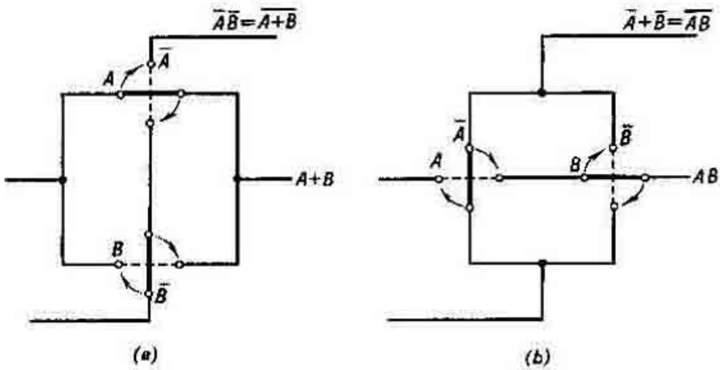



FIG. 38

donde $a$, $b$ y $c$ son unas proposiciones «simples», mientras que la adición y la multiplicación de las proposiciones y la operación «raya» significan, como de costumbre, las cópulas lógicas «o» e «y» y la negación. Hagamos corresponder a las proposiciones $a$, $b$ y $c$ los contactos

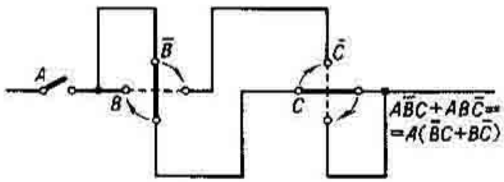



FIG. 39

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$; en tal caso nuestra proposición compleja $d$ quedará representada por el circuito de la fig. 39 que corresponde a la combinación.

$$\mathcal{D}=\mathcal{A}\overline{\mathcal{B}}\mathcal{C}+\mathcal{A}\mathcal{B}\overline{\mathcal{C}}$$

de los contactos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Para comprobar si la proposición $d$ es verdadera siendo, digamos, verdaderas las proposiciones $a$ y $b$ y falsa

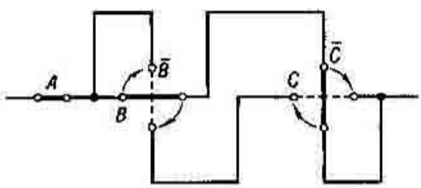



FIG. 40

la proposición $c$, bastará cerrar los contactos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ del circuito $\mathcal{D}$ y abrir el contacto $\mathcal{C}$ (fig. 40): si el circuito $\mathcal{D}$ conduce la corriente, quiere decir que corresponde a una proposición verdadera $i$ (o sea, a un circuito $\mathcal{I}$ que conduce la corriente), dicho de otro modo, en este caso la proposición $d$ es verdadera; en cambio, si dadas estas condiciones el circuito $\mathcal{D}$ no conduce la corriente (es «igual» al circuito $\mathcal{O}$), la proposición $d$ es equivalente en estas condiciones a la proposición $o$, en otras palabras, es falsa.

La segunda ventaja, que se obtiene de la semejanza existente entre el álgebra de los circuitos de contactos y el álgebra de las proposiciones, consiste en que permite construir, basándose en las reglas

de la Lógica, circuitos de contactos que satisfacen condiciones dadas de antemano (y que pueden ser bastante complejas). Lo mostraremos con dos ejemplos.

**Ejemplo 1.** *Es preciso construir un circuito eléctrico para un dormitorio con un bombillo eléctrico siendo deseable tener dos interruptores: uno junto a la puerta y otro sobre la cabecera; el giro de cualquier interruptor, independientemente de la posición que ocupe el otro, debe desconectar el circuito si anteriormente estaba conectado y conectarlo, si estaba desconectado.*

**Solución.** Designemos por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ los dos contactos correspondientes a los interruptores; en tal caso, el problema consiste en construir una combinación $\mathcal{C}$ (correspondiente al circuito eléctrico del dormitorio) de los contactos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ (así como, posiblemente, de $\overline{\mathcal{A}}$ y $\overline{\mathcal{B}}$) tal que *al cambiar el estado de cualquiera de estos dos contactos cambie también el estado de todo el circuito* $\mathcal{C}$ (es decir, que convierta en circuito abierto el circuito que conduce la corriente, y viceversa). En otras palabras, nuestro problema consiste en hallar una combinación $c$ de unas proposiciones $a$ y $b$ tal que al cambiar la proposición verdadera $a$ por la falsa, o viceversa, cambie el carácter («verdadero», «falso») de toda la proposición $c$; otro tanto se refiere a la proposición $b$. Esta condición es satisfecha por la proposición $c$ verdadera si ambas proposiciones $a$ y $b$ son verdaderas *o* si ambas son falsas, y falsa en los demás casos (en los que una de las proposiciones $a$ o $b$ es verdadera y la otra es falsa). El hecho de que en esta descripción hayamos empleado la conjugación «o» sugiere la idea de que es posible representar la

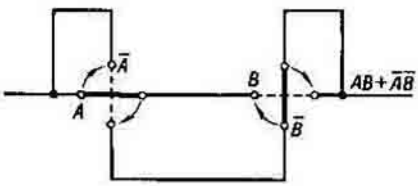



FIG. 41

proposición $c$ en forma de *suma* de dos proposiciones, una de las cuales es verdadera si son verdaderas $a$ y $b$, mientras que la segunda es verdadera si son verdaderas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ (o sea, si $a$ y $b$ son falsas). Fijándonos ahora en la conjugación «y», que figura en la descripción de los dos sumandos de la suma buscada, llegamos a la conclusión de que estos sumandos son

$$ab \quad \text{y} \quad \bar{a}\,\bar{b}.$$

De esta forma tenemos definitivamente

$$c = ab + \bar{a}\,\bar{b}$$

y es fácil comprobar, en efecto, que esta proposición $c$ satisface las condiciones más arriba enumeradas.

Volviendo ahora de las proposiciones a los circuitos de contactos, deducimos que el circuito eléctrico $\mathscr{C}$ que nos interese viene expresado por la fórmula

$$\mathscr{C}=\mathscr{A}\mathscr{B}+\overline{\mathscr{A}}\overline{\mathscr{B}};$$

está claro que no ofrece dificultad la realización técnica de semejante circuito (fig. 41).

**Ejemplo 2**[1]. *Hay que construir un circuito eléctrico para el mando de un elevador; suponemos, para simplificar, que el número de pisos es igual a dos. El circuito debe contener dos contactos que se manipulan oprimiendo botones instalados en la cabina del elevador (botón de descenso) y en el primer piso, junto a la puerta del elevador (botón de llamada); los contactos adicionales están relacionados con las puertas del elevador en el primero y segundo pisos, con la puerta interior de la cabina, así como con el piso del elevador sobre el cual ejerce presión el pasajero que se encuentra en la cabina. El circuito eléctrico que permite manejar el descenso*[2] *del elevador, debe conectarse sólo si la cabina se encuentra en el segundo piso y si, además, se cumplen las condiciones siguientes:*

1) *están cerradas ambas puertas del elevador y la puerta de la cabina; el pasajero se encuentra en el elevador y oprime el botón de descenso o*

2) *están cerradas ambas puertas del elevador (mientras que la puerta de la cabina está cerrada o abierta); en la cabina no hay nadie; una persona oprime en el primer piso el botón de llamada.*

**Solución.** Designemos los interruptores de contacto que regulan la conexión del circuito de la forma siguiente: $\mathscr{S}$ es el interruptor que se cierra sólo si la cabina se encuentra en el Segundo piso; $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ son los interruptores que se cierran cuando se cierran las Puertas del elevador en el piso 1 y en el piso 2; $\mathscr{P}_c$ es un interruptor análogo relacionado con la Puerta de la Cabina; $\mathscr{P}$ es el interruptor relacionado con el piso de la cabina que se cierra bajo la influencia del peso del Pasajero; $\mathscr{B}_d$ y $\mathscr{B}_l$ son los interruptores relacionados con el Botón de Descenso que se encuentra en la cabina del elevador y el Botón de Llamada que se encuentra en primer piso, junto a la puerta del elevador. Según la condición del problema, el Circuito buscado $\mathscr{C}_d$ para manejar el Descenso del elevador debe conectarse (conducir la corriente) sólo en el caso de que:

1) el contacto $\mathscr{S}$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{P}_1$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{P}_2$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{P}_c$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{P}$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{B}_d$ está cerrado

*o*

2) el contacto $\mathscr{S}$ está cerrado, *y* el contacto $\mathscr{P}_1$ está cerrado, *y* el

---

[1]) Hemos tomado este ejemplo del libro de И. А. Полетаев, Сигнал, Советское радио, 1958, стр. 214 (I. A. Poletáev, Señal, pág. 214).

[2]) Aquí sólo consideramos la estructura del circuito que permite manejar el descenso del elevador; análogamente se puede examinar también la estructura del circuito que desplaza el elevador hacia arriba (véase el ejercicio 6 de la pág. 75).

contacto $\mathcal{P}_2$ está cerrado, y el contacto $\mathcal{F}_c$ está cerrado o abierto, y el contacto $\mathcal{B}_l$ está cerrado, y el contacto $\mathcal{P}$ está abierto.

Teniendo en cuenta que la operación lógica «y» corresponde al producto de proposiciones (de contactos), mientras que la operación lógica «o» corresponde a la suma de las mismas, obtenemos fácilmente

$$\mathcal{C}_d=\mathcal{S}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{F}_c\mathcal{P}\mathcal{B}_d+\mathcal{S}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2(\mathcal{P}_c+\mathcal{P}_c)\mathcal{B}_l\mathcal{P}.$$

Empleando la igualdad

$$\mathcal{P}_c+\overline{\mathcal{F}}_c=\mathcal{I},$$

la propiedad del contacto $\mathcal{I}$ ($\mathcal{A}\mathcal{I}=\mathcal{A}$ para cualquier contacto $\mathcal{A}$)

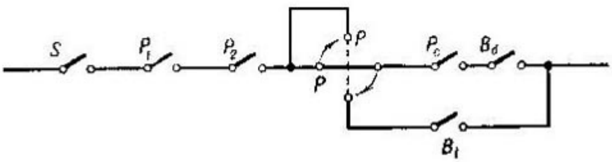



FIG. 42

así como la ley conmutativa de la multiplicación y la ley distributiva, podemos simplificar la expresión obtenida:

$$\mathcal{C}_d=\mathcal{S}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2(\mathcal{P}\mathcal{F}_c\mathcal{B}_d+\overline{\mathcal{P}}\mathcal{B}_l).$$

Es fácil persuadirse de cómo debe realizarse técnicamente semejante circuito (fig. 42).

## EJERCICIOS

**1.** Representa los circuitos de contactos que corresponden a las proposiciones complejas

a) $(a+b)(c+d)$;

b) $abc+a\overline{b}+\overline{a}$;

c) $ab\overline{c}+a\overline{b}c+\overline{a}bc$;

d) $(a+b)(\overline{a}+\overline{b})+ab+\overline{a}\,\overline{b}$.

**2.** Representa los circuitos de contactos que corresponden a las proposiciones

$$(a+c)(b+c)(a+d)(b+d) \quad \text{y} \quad ab+cd$$

y comprueba la «igualdad» de estos circuitos.

**3*.** Construye el circuito eléctrico $\mathcal{S}$ que comprende los contac-

tos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ (y, posiblemente, los contactos $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$) tal que

a) el circuito $\mathcal{S}$ se cierre sólo si están cerrados todos los contactos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ o si no está cerrado ninguno de estos contactos;

b) el circuito $\mathcal{S}$ se cierra sólo si están cerrados algunos de los contactos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ pero no todos estos contactos.

4. a) El comité consta de tres miembros. Construye el circuito eléctrico que muestre los resultados de una votación; cada miembro del comité vota oprimiendo un botón; el bombillo se enciende sólo si la proposición reúne la mayoría de votos.

b) Construye un circuito análogo para un comité compuesto del presidente y cinco vocales; el bombillo debe encenderse ahora sólo si la proposición reúne la mayoría de votos o si los votos se han repartido por igual pero el presidente ha votado a favor de la proposición.

5*. Construye un circuito eléctrico que permita encender y apagar el bombillo empleando

a) tres interruptores independientes (compara con el ejemplo 1 de la pág. 72);

b) $n$ interruptores independientes.

6. En las condiciones del ejemplo 2 de la pág. 73, construye un circuito que permita desplazar el elevador hacia arriba.

# DEFINICION DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Se denomina **álgebra de Boole** un conjunto arbitrario de elementos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para los cuales están definidas dos operaciones, adición y multiplicación, que ponen en correspondencia a cada par $\alpha$ y $\beta$ de elementos la *suma* $\alpha + \beta$ y el *producto* $\alpha\beta$ de los mismos[1]); está definida la operación «raya» que hace corresponder a cada elemento $\alpha$ un elemento nuevo $\bar{\alpha}$[2]); existen dos elementos «especiales» *o* e *ι* y se cumplen las reglas siguientes:

| **Reglas referentes a la operación de adición** | **Reglas referentes a la operación de multiplicación** |
|---|---|
| 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, | 1a) $\alpha\beta = \beta\alpha$; |

leyes conmutativas

| | |
|---|---|
| 2) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, | 2a) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$; |

leyes asociativas

| | |
|---|---|
| 3) $\alpha + \alpha = \alpha$, | 3a) $\alpha\alpha = \alpha$. |

leyes idempotentes

**Reglas que relacionan la adición y la multiplicación**

| | |
|---|---|
| 4) $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, | 4a) $\alpha\beta + \gamma = (\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$. |

leyes distributivas

**Reglas referentes a los elementos o y ι**

| | |
|---|---|
| 5) $\alpha + o = \alpha$, | 5a) $\alpha\iota = \alpha$; |
| 6) $\alpha + \iota = \iota$, | 6a) $\alpha o = o$. |

**Reglas referentes a la operación «raya»**

$$7)\ \bar{\bar{\alpha}} = \alpha;$$

---

1) Compara con lo expuesto en la pág. 24.

2) Los matemáticos dicen a este respecto que en el álgebra de Boole hay dos operaciones *binarias* (adición y multiplicación), que a cada dos elementos $\alpha$ y $\beta$ del álgebra de Boole ponen en correspondencia un nuevo elemento ($\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$, respectivamente), y una operación *unaria* que hace corresponder un elemento nuevo $\bar{\alpha}$ a cada elemento $\alpha$ del álgebra de Boole.

8) $\bar{o} = \iota$, | 8a) $\bar{\iota} = o$.

### Reglas que relacionan la operación «raya» con la adición y la multiplicación

9) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, | 9a) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.

reglas de Morgan

En la definición del álgebra de Boole cabe no exigir la presencia de la relación $\supset$: la inclusión $\alpha \supset \beta$ puede ser definida por cualquiera de las condiciones $\alpha + \beta = \alpha$ o $\alpha\beta = \beta$, de donde se pueden deducir todas las propiedades de la relación $\supset$:

$$\alpha \supset \alpha;$$
$$\text{si } \alpha \supset \beta \text{ y } \beta \supset \alpha, \text{ entonces } \alpha = \beta;$$
$$\text{si } \alpha \supset \beta \text{ y } \beta \supset \gamma, \text{ entonces } \alpha \supset \gamma;$$
$$\iota \supset \alpha \text{ y } \alpha \supset o;$$
$$\alpha + \beta \supset \alpha \text{ y } \alpha \supset \alpha\beta;$$
$$\text{si } \alpha \supset \beta, \text{ entonces } \bar{\beta} \supset \bar{\alpha}$$

(¡dedúcelas!). Es más, en la definición del álgebra de Boole se puede no exigir la presencia de una de las operaciones de adición o de multiplicación, exigiendo sólo la presencia de la otra operación y de la operación «raya»; por ejemplo, teniendo las operaciones «adición» y «raya», podemos definir la multiplicación mediante la regla de Morgan

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}.$$

Sin embargo, la presencia de las operaciones de adición y de multiplicación únicamente (sin la operación «raya») no determina aún el álgebra de Boole.

La definición del álgebra de Boole dada más arriba es poco «económica»: muchas de las propiedades enumeradas pueden ser deducidas de las otras, de modo que no es indispensable exigir que se cumplan. Esta definición tampoco es la única aceptada en la literatura: en varios libros y artículos, a las «reglas principales» (o *axiomas*) del álgebra de Boole se agregan además las siguientes:

### Reglas que relacionan la operación «raya» con los elementos o y ι

10) $\alpha + \bar{\alpha} = \iota$ | 10a) $\alpha\bar{\alpha} = o$.

En el caso de tal definición, el ejemplo 3 (álgebra de los máximos y los mínimos) considerado en el § 2 no representa ya un álgebra de Boole y el ejemplo 4 (álgebra de los mínimos múltiplos y los máximos divisores) ofrece un álgebra de Boole sólo en el caso en el que el número inicial $N$ se descompone en el producto de factores primos distintos dos a dos (tal es el número $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ que figura en el texto, pero no será éste el caso, digamos, del número $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$). A este respecto pueden verse, por ejemplo, los libros [2] y [4] o el artículo [8] de la lista bibliográfica que viene a continuación.

# RESPUESTAS Y SUGERENCIAS A EJERCICIOS

## §1

1. $(A+B)(A+C)(B+D)(C+D) =$
$= [(B+A)(C+A)]\cdot[(B+D)(C+D)] =$
$= (BC+A)(BC+D) = (A+BC)(D+BC) = AD+BC$

(aquí se utiliza la segunda ley distributiva).

2. $A(A+B) = AA+AB = A+AB = AI+AB =$
$= A(I+B) = AI = A.$

5. $A(A+I)(B+O) = A\cdot I\cdot B = AB.$

6. $(A+B)(B+C)(C+A) = ABC+AB+AC+BC =$
$= ABC+ABI+AC+BC = AB(C+I)+AC+BC =$
$= ABI+AC+BC = AB+BC+CA$

(véase la identidad demostrada en la pág. 21).

7. $[(A+B)(B+C)](C+D) = (AC+B)(C+D) =$
$= AC+ACD+BC+BD = AC+BC+BD.$

10. $[(A+B+C)(B+C+D)](C+D+A) =$
$= [AD+(B+C)](C+D+A) =$
$[(AD+B)+C][(A+D)+C] =$
$= (AD+B)(A+D)+C = AD+AD+AB+BD+C =$
$= AB+AD+BD+C.$

## §2

3. a)

| + | O | I |
|---|---|---|
| O | O | I |
| I | I | I |

y

| · | O | I |
|---|---|---|
| O | O | O |
| I | O | I |

b)

| + | O | P | C | I |
|---|---|---|---|---|
| O | O | P | C | I |
| P | P | P | I | I |
| C | C | I | C | I |
| I | I | I | I | I |

y

| · | O | P | C | I |
|---|---|---|---|---|
| O | O | O | O | O |
| P | O | P | O | P |
| C | O | O | C | C |
| I | O | P | C | I |

$$[m,\ n] = p_1^{\text{máx}[a_1,\ b_1]} p_2^{\text{máx}[a_2,\ b_2]} \ldots p_k^{\text{máx}[a_k,\ b_k]};$$

$$(m,\ n) = p_1^{\text{mín}[a_1,\ b_1]} p_2^{\text{mín}[a_2,\ b_2]} \ldots p_k^{\text{mín}[a_k,\ b_k]}.$$

## §3

**1.** $AB + AC + BD + CD = (A + D)(B + C)$ (véase el ejercicio 1 del § 1); $A + AB = A$ (véase el ejercicio 2 del § 1); $AB + BO + AI = A$ (véase el ejercicio 9 del § 1); $ABC + BCD + CDA = (A + B)(A + D)(B + D)C$ (véase el ejercicio 10 del 1).

**2.** a) $(A+B)(A+\bar{B}) = AA + A\bar{B} + BA + B\bar{B} = A + A\bar{B} + BA + O =$

$$= A + BA + \bar{B}A = A + (B+\bar{B})A = A + IA = A + A = A;$$

b) $AB + (A+B)(\bar{A}+\bar{B}) = AB + A\bar{A} + A\bar{B} + \bar{B}A + B\bar{B} =$

$$= AB + O + A\bar{B} + B\bar{A} + O = AB + A\bar{B} + B\bar{A} = (AB + A\bar{B}) + (AB + \bar{A}B) =$$

$$= A(B+\bar{B}) + (A+\bar{A})B = AI + IB = A + B;$$

c) $\overline{\bar{A}BC}\,\overline{\bar{A}B}\,\bar{A}C = (\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} + \bar{C})(\bar{\bar{A}} + \bar{B})\bar{A}C = [(A+B)+\bar{C}](A+\bar{B})\bar{A}C =$

$$= A(A+\bar{B})\bar{A}C + B(A+\bar{B})\bar{A}C + (A+\bar{B})\bar{A}(C\bar{C}) =$$

$$= (A\bar{A})(A+\bar{B})C + [B(A\bar{A})C + (B\bar{B})\bar{A}C] + (A+\bar{B})\bar{A}O =$$

$$= O(A+\bar{B})C + [BOC + O\bar{A}C] + O = O;$$

d) $A + B = A + IB = A + (A+\bar{A})B = A + AB + \bar{A}B =$

$$= (AI + AB) + \bar{A}B = A(I+B) + \bar{A}B =$$

$$= AI + \bar{A}B = A + \bar{A}B.$$

**3.** Aplica la operación «raya» a ambos miembros de la igualdad considerada; utiliza el hecho de que $\bar{\bar{A}} = A$.

**4.** $AB + A\bar{B} = A$ (véase el ejercicio 2a);

$$(A+B)(AB + \bar{A}\bar{B}) = AB \text{ (véase el ejercicio 2b);}$$

$$A(\bar{A}+B) = AB \text{ (véase el ejercicio 2d).}$$

**6.** a) A cada divisor $m$ del número $N$ le corresponde un subconjunto determinado del conjunto $I = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de divisores primos del número $N$; a saber, el conjunto de aquellos de estos divisores que a la vez son también divisores de $m$; además, si a los números $m$ y $n$ les corresponden los subconjuntos $A$ y $B$ del conjunto $I$, entonces a los números $m \oplus n = [m, n]$, $m \otimes n = (m, n)$ y $\bar{m} = \frac{N}{m}$ les corresponden los conjuntos $A + B$, $AB$ y $\bar{A}$.

b) Si $m = p^a$ y $n = p^b$, entonces $m \oplus n = [m, n] = p^{\text{máx}\{a, b\}}$, $m \otimes n = (m, n) = p^{\text{mín}[a, b]}$ y $\bar{m} = \frac{N}{m} = p^{1-a}$.

c) $\bar{m} = \frac{N}{m} = p_1^{A_1-a_1} p_2^{A_2-a_2} \ldots p_k^{A_k-a_k}$.

7. Estas igualdades no se cumplen en el «álgebra de los máximos y los mínimos» (salvo el caso en el que los elementos del álgebra son dos números solamente) y en el «álgebra de los m nimos múltiples y los máximos divisores» (salvo el caso en el que todos los divisores primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ del número $N$ son distintos dos a dos; compara con el ejercicio 6a).

8. a) $(A+B)(A+C) = A + AC + AB + BC =$
$= AI + AC + AB + BC = A(I + C + B) + BC =$
$= AI + BC = A + BC \subset A + B \subset A + B + C;$

b) $(A+B)(A+C)(A+I) = (A+B)(A+C)I =$
$= (A+B)(A+C) = A + BC \supset A \supset ABC$

(compara con el ejercicio 8a);

c) $(A+B)(B+C)(C+A) = AB + BC + CA \supset AB \supset ABC$ (véase el ejercicio 6 del § 1);

d) Puesto que $A \supset A\bar{B}$ y $B \supset \bar{A}B$, se tiene $A+B \supset A\bar{B}+\bar{A}B$.

9. $ABC \subset AB + AC$ (véase el ejercicio 8a);
$AB + AC + AO \subset A + B + C$ (véase el ejercicio 8b);
$AB + BC + CA \subset A + B + C$ (véase el ejercicio 8c).

10. $AB \subset (\bar{A}+B)(A+\bar{B})$.

12. a) $A$; b) $B$; c) $I$; d) $O$.

## §4

5. a) «el número entero positivo es par *y* es primo»; el conjunto de verdad es {2}; b) «el número entero positivo es impar *o* es primo»; el conjunto de verdad {1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, . . .} difiere del conjunto de los números impares en que se ha agregado el número 2; c) «el número entero positivo es impar *y* es primo»); el conjunto de verdad {3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .} difiere del conjunto de todos los números primos en que se ha excluido el número 2; d) «el número entero positivo es par *y* no es primo»; el conjunto de verdad {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, . . .} difiere del conjunto de todos los números pares en que se ha excluido el número 2; e) «el número entero positivo es impar *o* no es primo»; el conjunto de verdad {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . .} es el conjunto de todos los números enteros positivos a excepción del número 2.

## §5

5. $a + b = a$; $ab = b$.

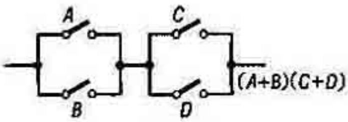
## §6

1. a) Véase la fig. 43; á) véase la fig. 44;
3. a) Véase la fig. 45, *a*; b) véase la fig. 45, *b*.
4. a) $\mathcal{S} = \mathcal{AB} + \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$;

b) $\mathcal{S} = \mathcal{A}(\mathcal{BC} + \mathcal{BD} + \mathcal{BE} + \mathcal{BF} + \mathcal{CD} + \mathcal{CE} + \mathcal{CF} + \mathcal{DE} + \mathcal{DF} + \mathcal{EF}) + \mathcal{BCDE} + \mathcal{BCDF} + \mathcal{BCEF} + \mathcal{BDEF} + \mathcal{CDEF}$

(el botón $\mathcal{A}$ lo oprime el presidente del comité).

5. a) $\mathcal{S} = \mathcal{ABC} + \mathcal{A}\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{C}} + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{B}\bar{\mathcal{C}} + \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}\mathcal{C}$.




FIF. 43

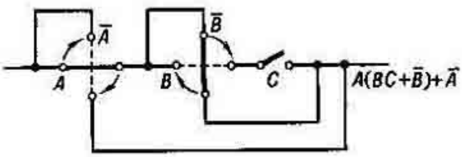
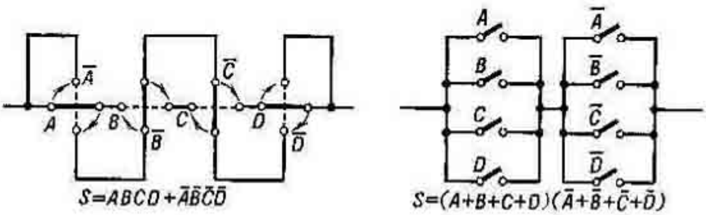



FIG. 44




a) b)

FIG. 45

# BIBLIOGRAFIA

1. **James T. Culbertson,** *Mathematics and logic for digital devices.* Prinston (N.J.) 1958, Van Nostrand.

En este libro, que no presupone del lector ningún conocimiento previo que rebase los márgenes del programa de la enseñanza media, pero que requiere cierta insistencia y determinados hábitos de lectura de literatura matemática, se toca de forma muy amplia todo el abanico de problemas que constituyen el contenido del folleto presente. Contiene numerosos problemas destinados al trabajo individual.

2. **E. Berkeley,** *Symbolic Logic and Intelligent Machines*, New York, 1959.

En muchos aspectos este libro es próximo al anterior, pero dedica menos espacio a las álgebras de Boole a cuenta de un enfoque más amplio de los problemas relacionados con las máquinas matemáticas.

3. **J. Kemeny** a.o., *Introduction to Finite Mathematics*, 1957.

Un amplio libro de texto destinado a los estudiantes de primer grado de especialidades no matemáticas; comienza por una detallada discusión de las cuestiones examinadas en el folleto presente. Contiene numerosos problemas.

4. **R. Courant** y **H. Robbins**, *What is mathematics?*, Oxford Univ. Press, 1941 (traducción castellana ¿Qué es la matemática?, Alda, Buenos Aires, 1954).

En este extenso libro, destinado en primer lugar a los alumnos de los grados superiores de la enseñanza media, también se tratan las álgebras de Boole.

5. **A. Kaufmann, R. Faure,** *Invitation a la recherche operationnelle*, Paris, 1963.

Uno de los capítulos de este libro de sumo interés, escrito para lectores poco preparados, está dedicado a las álgebras de Boole.

6. **R. R. Stoll,** *Sets. Logic and Axiomatic Theories*, *W. H.* Freeman and Co., San Francisco-London, 1961 (Conjuntos, lógica y teorías axiomáticas).

Este libro es de un contenido más profundo que los anteriores, pero será de gran interés para un lector más experto.

7. **Л. А. Калужнин,** *Что такое математическая логика*, «Наука», 1964 L. A. Kaluzhnin, ¿Qué es la lógica matemática?)

Un pequeño folleto de contenido próximo al libro [6].

8. **И. М. Яглом,** *Алгебры Буля*, сб. «О некоторых вопросах современной математики и кибернетики», «Просвещение», 1965, стр. 230—324 (I. M. Yaglóm, Algebras de Boole, en el libro Sobre algunas cuestiones de la Matemática moderna y de la Cibernética, págs. de 230 a 324).

## A NUESTROS LECTORES:

## SALEN A LA LUZ LOS SIGUIENTES LIBROS

**Efímov N.**

**GEOMETRIA SUPERIOR**

En este libro se examina un gran número de problemas. Se da la argumentación matemática de: la geometría euclídea, las geometrías no euclídeas de Lobachevski y Riemann, la geometría proyectiva, la geometría de Minkovski y las cuestiones geométricas de la teoría especial de la relatividad y una noción general de las formas topológicas de la geometría de curvatura constante. La obra se divide en tres partes. El material principal se expone en las primeras dos partes. El material de la tercera parte — nociones principales de la geometría de curvatura constante — puede ser aprovechado en el trabajo de los círculos matemáticos.
El libro se caracteriza por la claridad de su exposición y es comprensible para amplios círculos de lectores, aunque las cuestiones que trata, por así decirlo, no siempre son sencillas. Ha sido reeditado varias veces en la URSS y en otros países.
Está destinado a los estudiantes de centros docentes superiores, así como a todas aquellas personas que se interesan por las matemáticas.

**Berman G. y otros**

**PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANALISIS MATEMATICO**
(2ª edición)

Esta colección de problemas está dedicada a los estudiantes que cursan análisis matemático en centros de enseñanza técnica superior.
No contiene la teoría ni las fórmulas necesarias, el lector las encontrará en los capítulos respectivos del manual de análisis matemático. La mayoría de los problemas está subvidida en grupos, lo que facilita el trabajo con este libro. A los grupos de problemas de contenido homogéneo precede una indicación general. Todos los problemas de contenido físico van acompañados de las nociones necesarias sobre la física. El libro contiene un apéndice: Tablas de las magnitudes de algunas funciones elementales.
El autor analiza un total de 4465 problemas.

**Elsgoltz L.**

**ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL**
(3ª edición)

En este libro el autor examina las ecuaciones diferenciales de primer orden y de orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales, teoría de la estabilidad, ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, métodos de variaciones en los problemas con límites fijos, problemas de variaciones con límites móviles, condiciones suficientes del extremo, problemas de variaciones de extremo complejo y métodos directos en los problemas de variaciones.
Está destinado para los estudiantes de las facultades fisicomatemáticas de los centros de enseñanza superior y especialistas que estudian los problemas de matemáticas indicados.

Budak B., Samarski A., Tíjonov A.

**PROBLEMAS DE FISICA MATEMATICA**

**En dos tomos**

El libro abarca la mayor parte de los principales métodos de resolución de los problemas de física matemática. Se presta especial atención a la parte física de la cuestión, a la formulación de los problemas, a los modelos matemáticos de los procesos reales, a las ilustraciones físicas de los métodos de resolución y de los resultados.

La colección contiene problemas de deducción de ecuaciones y de condiciones límites, así como de aplicación de distintos métodos de resolución de problemas de frontera de la física matemática.

Los problemas cuentan con indicaciones para su resolución y con las respuestas a los mismos. Para muchos problemas se exponen las resoluciones con la aplicación de los métodos más sencillos.

El libro está destinado a estudiantes de universidades e institutos de enseñanza superior que cursan las matemáticas por un programa ampliado. La obra también resultará de interés para profesores universitarios, colaboradores de institutos de investigación científica y para ingenieros.

**Efímov A., Demidóvich B. (bajo la redacción de)**

**PROBLEMAS DE MATEMATICA PARA LOS CENTROS DE ENSEÑANZA TECNICA SUPERIOR**

**En dos partes**

Esta obra se compone de dos partes (parte primera: "Algebra lineal y fundamentos del análisis matemático"; parte segunda: "Capítulos especiales del análisis matemático") y está destinada a ser consolidadas en las clases prácticas (seminarios) las partes teóricas del curso de matemáticas superiores, estudiado en los centros de enseñanza superior. El manual contiene problemas sobre álgebra lineal y vectorial, geometría analítica, cálculo diferencial e integral de funciones de una y múltiples variables, ecuaciones diferenciales, análisis vectorial, fundamentos de la teoría de la variable compleja, series y sus aplicaciones al cálculo operacional. De este modo, el manual abarca todo el curso de matemáticas superiores estudiado en los centros de enseñanza superior, con excepción de algunos cursos especiales.
Cada capítulo de esta obra está provisto de una introducción en la cual se dispone el material teórico (definiciones, teoremas, fórmulas principales), necesario para la resolución del ciclo de problemas del capítulo dado. Aquí también se examina un número suficiente de ejemplos, que ilustran los métodos fundamentales de resolución de los problemas. Todos los problemas propuestos tienen respuesta al final del capítulo, y los más difíciles vienen provistos de indicaciones (estos problemas se indican con estrellas) o son resueltos (problemas con dos estrellas).
Una particularidad destacable de este libro la constituye la existencia de ciclos de problemas de cálculos según las partes fundamentales del curso. Cada problema de cálculo exige la escritura del programa en la lengua Fortran y luego la resolución en una computadora. La inclusión de este tipo de problemas en el manual es necesaria para una asimilación más profunda de los métodos numéricos conjuntamente con el estudio de los

capítulos correspondientes de las matemáticas superiores. En el manual propuesto, también es una novedad el estudio conjunto de las propiedades de las series en los campos real y complejo. Semejante metodología de exposición del material práctico sobre la teoría de las series, permite comprender con mayor profundidad y desde un punto de vista unificado las propiedades de las series funcionales, en particular, las series de potencias y las de Taylor, introducir la forma compleja de la serie de Fourier, la transformación de Fourier y la realización práctica de las mismas; la transformación discreta de Fourier (TDF).
Semejante enfoque de la exposición del material sobre la teoría de las series está asegurada mediante la introducción en el manual del capítulo "Fundamentos de la teoría de funciones de la variable compleja". El estudio de este capítulo de las matemáticas superiores por parte de los estudiantes de las especialidades de ingeniería ya hace tiempo que se ha transformado en una necesidad y en muchos institutos de enseñanza superior se ha incluido en los programas.

# Lecciones populares de matemáticas

Se publicaron los siguientes libros
de matemáticas de nuestro sello editorial:

E. Ventsel
Elementos de la teoría de los juegos

L. Golovina e I. Yaglom
Inducción en la Geometría

A.G. Kúrosch
Ecuaciones algebraicas de grados arbitrarios

A.I. Markushévich
Sucesiones recurrentes

I. Natanson
Problemas elementales de máximo y mínimo

V. Shervátov
Funciones hiperbólicas

**Editorial MIR** **Moscú**